H. Laurent

Sur la stabilité de l'équilibre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 130-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__130_1>

SUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE;

Par M. H. LAURENT.

Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_k$ des variables indépendantes, servant à fixer la position d'un système de corps; pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit, comme l'on sait, que le travail des forces agissant sur le système, abstraction faite des forces développées par les liaisons, soit nul pour tout déplacement compatible avec les liaisons. Si les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ont été choisies comme nous l'avons dit, c'est-à-dire indépendantes, il n'existera entre elles aucune liaison, et le travail prendra la forme

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_k\delta q_k,$$

que nous désignerons par δU, cette notation n'impliquant nullement en soi l'existence d'une fonction U. La condition d'équilibre sera alors

$$(1) \qquad \delta U = 0,$$

et cette formule se décomposera, comme l'on sait, dans les suivantes : $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0,\ldots$, qui fixeront les valeurs de q_1, $q_2,\ldots$, q_k. Supposons l'équation (1) satisfaite, et par suite le système en équilibre, nous dirons que l'équilibre est *stable dans la direction* δq_1, $\delta q_2,\ldots$, δq_n. Si, rendant par l'introduction de nouvelles liaisons le mouvement impossible dans toute autre direction, le corps est susceptible de repasser par sa position d'équilibre quand on l'en écarte infiniment peu dans la direction considérée, en l'abandonnant sans vitesse initiale, on dit que l'équilibre est instable dans la direction δq_1, $\delta q_2,\ldots$, quand il n'est pas stable dans cette direction.

Cela posé, écartons le corps infiniment peu de sa position d'équilibre dans la direction δq_1, $\delta q_2,\ldots$, en sorte que ses coordonnées deviennent $q_1 + \delta q_1$, $q_2 + \delta q_2,\ldots$. Si nous l'abandonnions à lui-même dans sa nouvelle position, il n'y serait pas, en général, en équilibre, et, en rendant le mouvement impossible dans toutes les directions autres que δq_1, $\delta q_2,\ldots$, il tendrait à se mouvoir dans cette direction. Pour savoir dans quel sens, nous ferons usage de l'artifice suivant :

Observons que, s'il y a tendance au mouvement, on pourra toujours s'y opposer en appliquant en chaque point du système une force égale, mais directement opposée à celle qui produirait son mouvement s'il était libre. Le système sera alors en équilibre dans sa nouvelle position, et la somme des travaux de toutes les forces qui le sollicitent doit être nulle; mais, si nous considérons en particulier le travail dans le mouvement virtuel coïncidant avec le mouvement réel que prendrait le corps si l'on n'avait pas introduit de nouvelles forces, le travail de chacune de ces nouvelles forces, qui sont les forces d'inertie, sera négatif. Désignons alors leur travail total par $-\Theta$. Le travail des autres forces sera la valeur que prend δU quand on y remplace q_1 par $q_1 + \delta q_1$, q_2 par $q_2 + \delta q_2, \ldots$, si le corps s'éloigne de sa position d'équilibre; au contraire, il sera ce que devient δU quand on y remplace q_1 par $q_1 - \delta q_1$, q_2 par $q_2 - \delta q_2, \ldots$, si le corps se rapproche et repasse par sa position d'équilibre; dans le premier cas, δU devient

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 \ldots + Q_k \delta q_k + \delta q_1 \sum \frac{dQ_1}{dq} \delta q + \delta q_2 \sum \frac{dQ_2}{dq} \delta q,$$

ou bien

$$\delta U + \sum \frac{dQ_i}{dq_j} \delta q_i \delta q_j,$$

et, dans le second cas,

$$Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_k \delta q_k - \delta q_1 \sum \frac{dQ_1}{dq} \delta q - \ldots,$$

ou bien

$$\delta U - \sum \frac{dQ_i}{dq_j} \delta q_i \delta q_j.$$

Si nous posons

$$\sum \frac{dQ_i}{dq_j} \delta q_i \delta q_j = \delta^2 U,$$

l'équation qui exprime les conditions d'équilibre du corps dans sa nouvelle position sera

$$-\Theta + \delta U \pm \delta^2 U = 0,$$

le signe + convenant au cas où le corps s'éloigne, le signe — au cas où il se rapproche de sa position d'équilibre. Si l'on observe que δU est nul en vertu de (1), on aura

$$-\Theta \pm \delta^2 U = 0, \quad \text{ou} \quad \pm \delta^2 U = \Theta;$$

le second membre Θ est positif pour le déplacement virtuel coïncidant avec celui qui a réellement lieu; car $-\Theta$ est, d'après la remarque faite plus haut, essentiellement négatif; donc il faut prendre devant le premier membre le signe + si $\delta^2 U$ est positif, et le signe — s'il est négatif.

Ceci revient à dire que, si $\delta^2 U$ est positif, le mouvement réel que prendra le corps sera $+\delta q_1 + \delta q_2, \ldots$; il s'éloignera donc de sa position d'équilibre, et il y aura instabilité. Si, au contraire, $\delta^2 U$ est négatif, le déplacement réel du corps sera $-\delta q_1$, $-\delta q_2, \ldots$, c'est-à-dire qu'il repassera par sa position d'équilibre, et que cet équilibre sera stable. Si le signe de $\delta^2 U$ reste indéterminé, il y aura en général instabilité.

Ainsi, en résumé, pour voir si un corps est en équilibre stable ou instable dans une position donnée $q_1, q_2, \ldots$ et le long d'une direction δq_1, $\delta q_2, \ldots$, il faut former la quantité $\delta^2 U$, et l'équilibre sera stable le long de la direction considérée, si le long de cette direction on a $\delta^2 U < 0$: il sera instable dans le cas contraire.

Ces conclusions sont d'ailleurs soumises à des restrictions sur lesquelles on n'attire peut-être pas assez l'attention dans les Cours de Mécanique, restrictions qui infirment souvent le principe des vitesses virtuelles lui-même. Ainsi il est incontestable, pour tout homme de bon sens, qu'un point matériel pesant est en équilibre stable dans toutes les directions lorsqu'il est au fond d'un entonnoir conique à axe vertical; cependant on n'a pas $\delta U = o$, en effet, appelant δq le déplacement en hauteur, δU est de la forme $p\,\delta q$, et ni p ni δq ne peuvent être nuls.

Lorsque δU est une différentielle exacte, il existe une fonction U dont la différentielle est nulle dans le cas de l'équilibre, et il est clair que, si l'équilibre est stable dans toutes les directions, U passe par un maximum ; si l'équilibre est instable dans toutes les directions, U passe par un minimum. On dit alors simplement que l'équilibre est *stable* ou *instable*.

Les directions relatives à la stabilité et à l'instabilité sont distribuées d'une façon assez curieuse et qui n'a pas encore été remarquée, à ce que je crois.

Considérons un point matériel m soumis à l'action de forces qui se réduisent à trois, X, Y, Z, parallèles respectivement à trois axes rectangulaires. Soient x, y, z les coordonnées du point matériel; dans ce cas, on a

$$\delta U = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z,$$

$$\delta^2 U = \frac{dX}{dx}\,\delta^2 x + \left(\frac{dY}{dz} + \frac{dZ}{dy}\right)\delta y\,\delta z + \ldots.$$

Si l'on construit alors la surface conique ayant pour équation

$$(2) \qquad \frac{dX}{dx}\,\xi^2 + \left(\frac{dY}{dz} + \frac{dZ}{dy}\right)\eta\zeta = \ldots = o,$$

ξ, η, ζ désignant les coordonnées courantes relatives au point m considéré comme origine, il est facile de voir que cette surface partagera l'espace en deux régions : dans l'une d'elles $\delta^2 U$ sera positif, et dans l'autre il sera négatif. Sur la surface même, on aura $\delta^2 U = o$. Donc, si par une position d'équilibre d'un point matériel libre on fait passer un certain cône du second degré, l'équilibre sera stable pour tous les déplacements effectués dans une certaine région de l'espace déterminé par ce cône, et l'équilibre sera instable pour tous les déplacements correspondant à l'autre région. Si le cône en question est imaginaire, il y aura stabilité ou instabilité dans toutes les directions; la même chose aura évidemment lieu pour un point faisant partie d'un système quelconque avec ou sans liaisons, pourvu que l'on substitue aux liaisons les forces qui les produisent; on pourra ainsi, pour chaque point d'un système, construire les régions de stabilité et d'instabilité.

On pourra toujours diriger les axes de coordonnées de telle sorte que le cône (2) soit rapporté à ses axes; mais alors les termes en $\eta\zeta$, en $\xi\zeta$ et en $\eta\xi$ disparaissent, et la quantité $\delta^2 U$ affectera la forme

$$\frac{dX}{dx}\delta x^2 + \frac{dY}{dy}\delta y^2 + \frac{dZ}{dz}\delta z^2.$$

Autour du point m considéré dans sa position d'équilibre, décrivons une petite sphère de rayon r, puis supposons le point m dérangé de sa position d'équilibre, mais placé sur la sphère dans la direction δx, δy, δz; portons sur cette direction une longueur égale à $\frac{1}{\sqrt{\delta^2 U}}$: le lieu des points ainsi obtenus aura pour équation, en coordonnées polaires (ρ, α, β, γ),

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 U}},$$

ou bien, en dirigeant les axes de la façon la plus simple,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{dX}{dx} r^2\cos^2\alpha + \frac{dY}{dy} r^2\cos^2\beta + \frac{dZ}{dz} r^2\cos^2\gamma}}.$$

En prenant des coordonnées ordinaires $\xi = \rho \cos\alpha$, $\eta = \rho\cos\beta$, $\zeta = \rho\cos\gamma$, cette équation devient

$$\frac{1}{r^2} = \frac{dX}{dx}\xi^2 + \frac{dY}{dy}\eta^2 + \frac{dZ}{dz}\zeta^2.$$

Nous trouvons ainsi une surface du second degré dont le cône asymptote fournissait les régions de stabilité, et la surface n'est réelle que dans les régions d'instabilité. Toutefois on peut adjoindre à cette surface sa conjuguée, et l'on obtient ainsi une double surface du second ordre à centre, dont les rayons vecteurs permettront de comparer dans toutes les directions les valeurs de $\delta^2 U$.

Or, si l'on remonte à l'origine de cette théorie, $\delta^2 U$ est égal en valeur absolue à la quantité que nous avons appelée Θ et qui représente le travail des forces d'inertie. Ce travail, pour un déplacement d'amplitude r, est égal à la force vive acquise par le système; on peut donc dire que la double surface du second ordre à laquelle nous venons de parvenir sert à faire connaître la force vive avec laquelle un point déplacé d'une quantité constante revient à sa position d'équilibre. Cette force vive est maxima et minima, comme l'on voit, dans deux directions rectangulaires.

Considérons maintenant un point m en équilibre sur une surface que nous représenterons par l'équation

$$z = f(x, y),$$

en représentant, conformément à l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction f. On pourra poser

$$\delta U = X\delta x + Y\delta y$$

et

$$\delta^2 U = \frac{dX}{dx}\delta x^2 + \left(\frac{dX}{dy} + \frac{dY}{dx}\right)\delta x\delta y + \frac{dY}{dy}\delta y^2.$$

Si l'on prend pour plan des xy le plan tangent à la surface menée par le point M, l'équation $\delta^2 U = 0$, ou bien

$$\frac{dX}{dx}\delta x^2 + \left(\frac{dY}{dy} + \frac{dX}{dx}\right)\delta x \delta y + \frac{dY}{dy}\delta y^2 = 0,$$

dans laquelle on considère δx et δy comme des coordonnées courantes, représentera deux droites qui sépareront les portions de surfaces relatives à l'équilibre stable ou instable. Si l'on représente par P, Q, R les composantes de la force qui sollicite le point m, on aura

$$X = P + Rp, \quad Y = Q + Rq,$$

et l'équation $\delta^2 U$ deviendra, en observant que $p = 0$, $q = 0$,

$$\left(\frac{dP}{dx} + rR\right)\delta x^2 + \left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dy} + 2sR\right)\delta x \delta y + \left(\frac{dQ}{dy} + tR\right)\delta y^2 = 0.$$

En prenant pour axes des x et des y les axes de l'indicatrice, on a

$$\left(\frac{dP}{dx} + Rr\right)\delta x^2 + \left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dy}\right)\delta x \delta y + \left(\frac{dQ}{dy} + Rt\right)\delta y^2 = 0,$$

Toutes les fois que l'on aura $\frac{dP}{dx} = 0$, $\frac{dQ}{dy} = 0$ et $\frac{dQ}{dx} = -\frac{dP}{dy}$, l'équation précédente représentera les asymptotes de l'indicatrice. Or les équations précédentes supposent $P = ay + b$, $Q = -ax + c$: ainsi l'on peut dire que, si les composantes parallèles au plan tangent mené par le point m de la force qui sollicite ce point sont des fonctions linéaires de la forme $ay + b$ et

— $ax + c$, les régions de stabilité et d'instabilité seront délimitées par les asymptotes de l'indicatrice.

Ainsi, par exemple, si un point pesant est en équilibre sur une surface, l'équilibre sera stable dans l'un des angles des asymptotes de l'indicatrice, et instable dans l'autre angle, ce qui est conforme aux indications du bon sens.