PEAUCELLIER

Note sur une question de géométrie de compas

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 71-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__71_1>

NOTE SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DE COMPAS (**);

PAR M. PEAUCELLIER.

Nous donnerons le nom de *compas composé* à un système quelconque de pièces rigides articulées *à liaison complète*. On sait que cette dénomination s'applique généralement à tout assemblage de corps unis entre eux de telle sorte, que le mouvement d'un point quelconque

(*) SALMON, *Algèbre supérieure*, § 157.

(**) Cette question date de 1864, et a été résolue à cette époque, comme l'indique la lettre insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 414.

commande celui de tous les autres. Le pantographe, le parallélogramme de Watt, etc., constituent de pareils assemblages et peuvent être considérés comme des compas composés.

Les appareils de ce genre jouissent du précieux avantage d'exiger de très-faibles efforts pour être mis en mouvement; ils donnent lieu à des déplacements continus et parfaitement définis, grâce à la possibilité de supprimer pour ainsi dire complétement tout jeu dans les articulations. Ils n'ont point d'irrégularités ni de « temps perdu », pour parler le langage technique. Ces diverses propriétés les recommandent d'une manière toute spéciale au constructeur d'instruments de précision, et nous les adopterons exclusivement pour l'objet que nous avons en vue : c'est-à-dire le tracé mécanique des courbes planes.

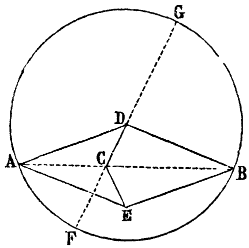
La ligne que parcourt un point quelconque guidé par une combinaison de pièces articulées est nécessairement algébrique. On conçoit que, réciproquement, toute courbe algébrique puisse être engendrée à l'aide d'un système articulé convenablement choisi : car on disposera toujours d'un nombre suffisant d'éléments variables, rayons et centres de rotation, pour satisfaire aux équations exprimant l'identité entre la courbe décrite et une courbe donnée.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons à faire connaître les compas composés traçant les lignes les plus connues : la droite, le cercle de tout rayon, les sections coniques, enfin les conchoïdes, la cissoïde. Nous présenterons les résultats de nos recherches sous la forme synthétique, les procédés analytiques qui nous ont guidé dans la partie la plus intéressante de ce travail, celle relative à la ligne droite, étant beaucoup plus compliqués et ne constituant pas, dans l'espèce, un procédé d'investigation suffisamment méthodique.

Lemme. — Un point quelconque C (*fig.* 1), pris sur la diagonale d'un losange, la divise en deux segments dont le produit $AC \times CB$ est égal à la différence $\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2$, entre les carrés construits sur le côté du losange et sur la distance CD du point considéré aux sommets de l'autre diagonale.

En effet, prolongeons CD jusqu'à sa rencontre en F

Fig. 1.



et G avec le cercle décrit du point D comme centre avec DA pour rayon; on aura

$$\begin{aligned} AC \times BC = CF \times CG &= (AD - CD)(AD + CD) \\ &= \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 \text{ (*)}. \end{aligned}$$

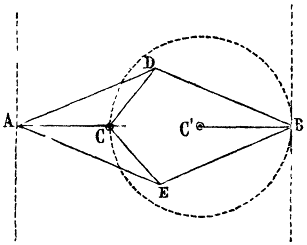
Il suit de là que si l'on suppose que la figure EADBECD représente un assemblage de tiges rigides articulées à leurs extrémités, et que le point C demeure fixe, les sommets opposés A et B décriront des courbes réciproques l'une de l'autre. Cette combinaison formera l'organe essentiel des divers compas composés que nous aurons à examiner.

(*) Cette démonstration, d'une remarquable simplicité, nous a été donnée par M. Mannheim.

En effet :

1° La réciproque d'une droite étant un cercle passant par le pôle, si le point B (*fig.* 2 et 3) est assujetti à se

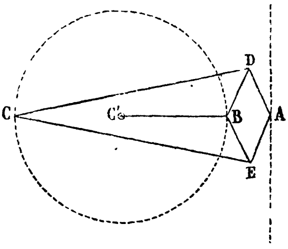
Fig. 2.



mouvoir circulairement, en passant par le centre d'articulation C, le mouvement du point A sera rectiligne. Il suffira donc, pour engendrer la droite, d'introduire dans le mécanisme précité EADBECD un nouveau centre fixe C′, auquel on reliera le point B, le lien C′B étant d'une longueur égale à la distance CC′ des centres fixes.

Ce qui précède constitue une solution rigoureuse du problème posé par Watt ; elle est assez simple pour pouvoir être employée avec avantage dans certaines machines à longue course. M. Mannheim, en 1867, en a fait

Fig. 3.



l'objet d'une communication à la Société Philomathique de Paris.

2° Lorsque le cercle décrit par le sommet B ne passe point par le centre fixe C, le sommet opposé A se meut sur un cercle dont le rayon est représenté par l'expression

$$R = \frac{(a^2 - b^2)r}{r^2 - d^2},$$

dans laquelle on désigne par a le côté du losange AD, b la bride CD, r le rayon C′B, d la distance des centres C, C′.

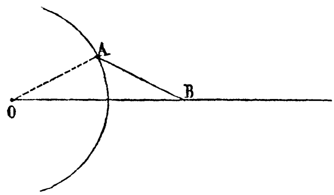
Si $r = d$, on a $R = \infty$, ce qui répond, en effet, au cas de la ligne droite.

Cette combinaison de pièces articulées permettra donc, en faisant varier l'un des éléments, la distance CC′ par exemple, de tracer d'une manière continue des arcs de cercle de toute courbure. Les dessinateurs savent que cette opération, en apparence si élémentaire, n'est pas moins compliquée que le tracé d'une courbe géométrique quelconque, dès qu'il s'agit d'une courbure dépassant les limites extrêmes du compas à verge.

3° Considérons maintenant les sections coniques. On sait qu'il existe, pour la construction de ces courbes, une infinité de théorèmes conduisant à déterminer, au moyen de la ligne droite et du cercle, des points successifs de ces lignes. Les systèmes articulés dont il vient d'être question permettant, pour ainsi dire, de matérialiser toute combinaison de lignes droites et de cercles, sans recourir à d'autres organes de transmission que des tiges articulées, on pressent qu'il doit exister une infinité de compas composés, propres au tracé des lignes du second ordre.

Ainsi, une droite finie AB (*fig.* 4) se mouvant, par exemple, en s'appuyant sur une circonférence de même rayon et sur un de ses diamètres OB, chaque point de la ligne mobile décrit une ellipse. Ce théorème fournit un moyen très-simple de constituer le compas elliptique, puisque nous savons guider la droite AB par ses extrémités, comme l'exigent les données de la question.

Fig. 4.



Mais il est une solution plus générale, susceptible, par une même combinaison de lignes, d'engendrer toutes les coniques indistinctement.

L'équation en coordonnées polaires de ces courbes est

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos\omega},$$

et représente des ellipses, des paraboles ou des hyperboles, selon que e est < 1, égal à 1 ou > 1.

Si l'on considère la courbe réciproque de la précédente, elle aura pour équation

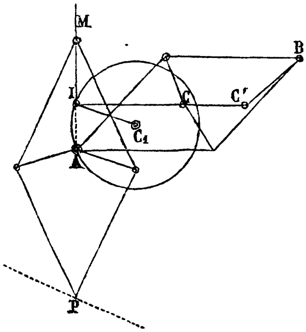
$$\rho' = \frac{k^2 (1 + e \cos\omega)}{p},$$

k étant une constante. C'est un limaçon de Pascal, dont nous allons indiquer la génération mécanique.

Pour cela, revenons au compas relatif à la ligne droite, auquel nous ajouterons la bride C_1I (*fig.* 5), articulée au point I de la pièce CC′, où la droite décrite par A coupe la ligne des centres CC′. Si l'on fixe le point C_1 ainsi que le sommet A, que l'on fasse $C_1I = C_1A$, et que toutes les autres parties de la figure soient libres, il est visible que tout point M de la perpendiculaire IM à CC′ parcourra un limaçon de Pascal. L'équation en sera

$$\rho' = 2 C_1 I \cos\omega + IM.$$

Fig. 5.



Sa réciproque par rapport à A est une conique. On obtiendra cette dernière en liant le point M au sommet libre d'un losange articulé, dont on fixera le centre d'assemblage des brides en A. Ce point deviendra le foyer de la conique, dont AC sera la direction de l'axe principal, et qui sera :

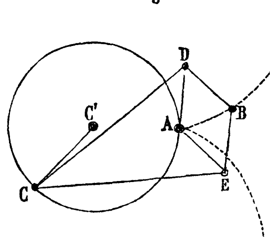
$$\left.\begin{array}{l}\text{Une ellipse}\\ \text{Une parabole}\\ \text{Une hyperbole}\end{array}\right\}\ \text{si}\ \frac{IM}{2C_1I}\left\{\begin{array}{l}<1,\\ =1,\\ >1.\end{array}\right.$$

Il est d'ailleurs évident que, en attribuant à IM et à C_1I des valeurs convenables, il sera possible de tracer avec le même compas composé toutes les courbes du second degré.

Conchoïdes du cercle et de la droite, cissoïde, etc. — On vient de voir comment on peut opérer pour le tracé de la conchoïde du cercle ou limaçon de Pascal; en modifiant la combinaison relative à cette courbe, d'une manière analogue à ce que l'on a fait pour les coniques, on engendrera la conchoïde de la droite. On trouve de même des combinaisons propres à la lemniscate; mais la plupart d'entre elles sont assez compliquées. Nous nous contenterons d'indiquer, pour terminer cette étude sommaire, le compas et le cissoïde, qui est d'une extrême simplicité.

Le centre d'articulation des brides CD, CE (*fig.* 6) est assujetti à parcourir un cercle passant par le sommet fixe A du losange, et dont le diamètre égale $\sqrt{b^2 - a^2}$;

Fig. 6.



b et a désignant, comme précédemment, les longueurs CD et AD. Le sommet opposé B tracera, dans ces conditions, la cissoïde, comme il est aisé de s'en assurer en formant l'équation de la courbe décrite.