NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. RESAL

Essai sur la détermination du frottement de l'air sur un projectile oblong

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 561-565

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__561_1>

ESSAI SUR LA DÉTERMINATION DU FROTTEMENT DE L'AIR SUR UN PROJECTILE OBLONG;

PAR M. H. RESAL.

La résistance de l'air proprement dite n'a aucune influence sur le mouvement d'un projectile oblong autour de son axe, mais ce mouvement doit être retardé par le frottement développé entre sa surface et l'air, résistance sur laquelle nous n'avons aucune donnée expérimentale.

Si l'on admet que le frottement est le même que dans les tuyaux de conduite des gaz, en le rapportant à l'unité de surface, il a pour expression

$$0,0003555\,\rho U^2,$$

U étant la vitesse d'un point de la surface du corps et ρ le poids spécifique de l'air que l'on peut prendre égal à $1^{kg},3$.

On peut sans inconvénient négliger la partie ogivale du projectile, en exagérant légèrement, si l'on veut, la longueur du cylindre pour établir une sorte de compensation.

Soit JR^2 le moment d'inertie du cylindre par unité de longueur, R étant son rayon, nous avons, dans l'hypothèse actuelle,

$$\mathrm{JR}\,\frac{d\mathrm{U}}{dt} = -\,0{,}000355 \times 1^{\mathrm{kg}},3 \times 2\pi\mathrm{RU}^2\mathrm{R},$$

d'où

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{U}_0}{1 + 0{,}0029\,\frac{\mathrm{V}_0\mathrm{R}t}{\mathrm{J}}},$$

en appelant U_0 la valeur initiale de U.

Il serait assez facile, il me semble, de vérifier si cette formule est exacte ou non, en opérant sur un cylindre creux très-léger, en aluminium par exemple, assez long par rapport au diamètre pour que l'on puisse négliger ce qui est relatif aux extrémités, reposant par deux tourillons sur les jantes croisées de deux couples de poulies identiques à ceux de la machine d'Atwood. La réduction du nombre de tours dans les minutes successives, accusée par un compteur et un chronomètre, permettrait d'établir la loi du mouvement, et par suite celle de la résistance.

Cherchons à voir maintenant à quoi peut conduire l'hypothèse admise par Navier dans le mouvement des fluides.

Soient x le rayon d'une couche fluide quelconque, V la vitesse des molécules de cette couche au bout du temps t, le frottement par unité de surface de la même couche sur la couche de rayon $x - dx$, en remarquant que $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ est négatif, est de la forme $-\varepsilon\rho\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}$, ε étant une constante, et doit être considéré comme force motrice pour la première couche; le moment moteur pour la couche entière est $-\,2\pi x^2\rho\varepsilon\,\frac{d\mathrm{V}}{dt}$; le moment résistant dû au frottement sur la couche suivante est

$$2\pi x^2\rho\varepsilon\,\frac{d\mathrm{V}}{dx} + 2\pi\varepsilon\,\frac{d\rho x^2\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{dx}\,dx.$$

On a donc

$$2\pi \frac{d\rho x^2 \frac{dV}{dx}}{dx} - 2\pi x^2 \rho \frac{dV}{dt} = 0.$$

Si l'on considère que le mouvement de l'air devient insensible à une distance assez faible d'un corps tournant, on peut considérer ρ comme constant, et alors l'équation ci-dessus se réduit à la suivante :

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} = \varepsilon \left(\frac{2}{x} \frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2} \right),$$

qui n'est autre chose que celle du mouvement de la chaleur dans une sphère.

Le frottement entre le corps et le fluide est de la forme

$$\alpha (U - V_1),$$

α étant une constante et V_1 la vitesse de la couche fluide en contact avec le corps. On a, d'après Navier,

$$-\varepsilon\rho \frac{dV}{dx} = \alpha (U - V_1) \quad \text{pour} \quad x = R,$$

ou, en posant $\frac{\alpha}{\varepsilon\rho} = h$,

$$(2) \qquad \frac{dV}{dx} + h (U - V_1) = 0 \quad \text{pour} \quad x = R;$$

nous avons maintenant comme seconde condition

$$(3) \qquad V = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

$f(x)$ étant une fonction donnée.

En supposant, pour plus de simplicité, que les forces extérieures ne donnent pas de couple perpendiculaire à l'axe, nous aurons

$$(4) \qquad J \frac{dU}{dt} = -2\pi\alpha (U - V_1) R,$$

avec la condition

$$(5)\qquad U = U_0 \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les équations (1) et (4), avec les conditions (2), (3), (5), doivent résoudre complétement le problème.

La première de ces équations est satisfaite par

$$(6)\qquad V = \frac{e^{-\varepsilon n^2 t}}{x}(A \cos nx + B \sin nx),$$

n étant un nombre positif quelconque, A et B deux constantes arbitraires.

Si l'on pose

$$U = C e^{-\varepsilon n^2 t},$$

les conditions (2) et (4) donnent

$$A\left[\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R} + h\right)\cos nR + n \sin nR\right] + B\left[\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R} + h\right)\sin nR - n \cos nR\right] = hC,$$

$$\frac{\varepsilon n^2 J}{2\pi\alpha R} = c - A\cos nR - B \sin nR,$$

ce qui permettra de déterminer A et B en fonction de C et de n.

On aura ensuite

$$f(x)\,x = \Sigma(A\cos nx + B \sin nx), \quad U_0 = \Sigma C,$$

pour déterminer les n et les C; mais je ne vois pas de méthode qui puisse conduire à ce résultat.

Pour que les intégrales des équations (1) et (4) ne renferment chacune qu'un seul terme, il faut que

$$f(x)\,x = A\cos nx + B \sin nx, \quad U_0 = C,$$

et la fonction ne dépendra ainsi que d'un paramètre n.

On pourrait, par exemple, se proposer de déterminer la valeur que doit avoir n pour que $f(x)$ par rapport à x fût un maximum, de manière à se rapprocher de l'actualité où $f(x) = 0$. Nous ne croyons pas devoir nous livrer à cette recherche.

Le fait important pour nous est que U doit être de la forme He^{-mt}, H et m étant des fonctions de R qu'il appartient à l'expérience de déterminer, si toutefois l'hypothèse de Navier, qui nous a servi de point de départ, est exacte.