NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LEMOINE

Note sur un point remarquable du plan d'un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 364-366

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__364_1>

NOTE SUR UN POINT REMARQUABLE DU PLAN D'UN TRIANGLE;

Par M. E. LEMOINE.

Les propositions qui suivent n'ont pas, croyons-nous, encore été remarquées. La démonstration en est assez simple pour qu'il suffise de les énoncer ici.

A, B, C, sommets d'un triangle dont les côtés BC, CA, AB ont pour longueurs a, b, c.

1° Si l'on mène respectivement dans les angles A, B, C des antiparallèles à BC, CA, AB, et qu'on prenne les milieux A′, B′, C′ de la partie de ces antiparallèles comprise entre les deux côtés de l'angle, les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un point ω, que nous nommerons *centre des médianes antiparallèles*.

2° Soit O un point du plan ; si, par O, je mène des parallèles aux trois côtés du triangle ABC, elles rencontrent les côtés en six points, sommets d'un hexagone inscriptible à une conique, et circonscriptible à une autre.

La conique circonscrite sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que O sera intérieur à l'ellipse de surface maximum inscrite dans ABC, sur cette ellipse, ou à l'extérieur.

3° Si O coïncide avec ω, l'ellipse circonscrite est un cercle dont le centre est le milieu de la ligne qui joint ω au centre du cercle circonscrit ; le rayon ρ de cette circonférence est donné par la formule

$$\rho^2 = \mathrm{R}^2 \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4° Les trois cordes que le cercle intercepte sur les trois côtés sont proportionnelles aux cubes de ces côtés.

5° Les trois côtés de l'hexagone, qui ne sont pas compris sur ceux du triangle, sont égaux et ont pour valeur

$$l = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

6° Les antiparallèles, menées par ω aux trois côtés, sont égales.

7° La distance d de ω au centre du cercle circonscrit est donnée par la formule

$$d^2 = \mathrm{R}^2 - 3l^2.$$

8° Si Aω coupe BC en α, on a

$$\mathrm{A}\alpha = 2\frac{bc}{b^2 + c^2} l_\alpha,$$

l_α étant la médiane partant de A du triangle ABC.

9° Le centre des médianes antiparallèles ω est aussi le point de rencontre des droites qui, partant des sommets, divisent le côté opposé en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents. C'est donc, d'après M. Hossard, le point tel que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés soit un minimum.

10° Par

A	je mène à	AC	une perpendiculaire	$\alpha'\gamma'$,
B	»	AB	»	$\alpha'\beta'$,
C	»	CB	»	$\beta'\gamma'$,
A	»	AB	»	$\alpha''\beta''$,
B	»	BC	»	$\beta''\gamma''$,
C	»	AC	»	$\alpha''\gamma''$.

On voit facilement que $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ passent au centre du cercle circonscrit.

Cela posé

$\alpha'\alpha''$	coupant	BC	en	A_1,
$\beta'\beta''$	»	AC	»	B_1,
$\gamma'\gamma''$	»	AB	»	C_1,

les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite.

Soient

A''	le conjugué harmonique de	A_1	par rapport aux points	B et C,
B''	»	B_1	»	A et C,
C''	»	C_1	»	B et A,

les trois droites AA'', BB'', CC'' passent au centre des médianes antiparallèles.