Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 23-26
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__23_0>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Doucet, professeur au lycée de Lyon. — Permettez-moi, je vous prie, de revenir un instant sur une question traitée deux fois déjà dans les *Annales*, et qui est la suivante :

Par deux points fixes A *et* B *pris sur une ellipse donnée, on fait passer des cercles variables; on demande le lieu des points* M *où concourent les tangentes menées à l'ellipse et à chacun des cercles.*

Vous avez donné, Monsieur, dans les *Nouvelles Annales* (1[re] série, t. X, p. 408) une solution géométrique qui ne laisse rien à désirer. En même temps, vous demandiez à vos lecteurs une solution analytique qui, en raison de certaines difficultés, devait être *intéressante* et *instructive* (*).

M. Breton (de Champ) a donné une solution de cette nature, fondée sur les principes de l'homologie. Cette solution est reproduite par M. Housel, dans son *Introduction à la Géométrie supérieure* (p. 177). « L'analyse ordinaire, dit cet auteur, ne donnerait pas uniquement l'équation du lieu cherché, parce que les quatre tangentes communes que le calcul indique toujours pour deux coniques se coupent deux à deux en six points.... » Il fallait donc avoir recours aux formules de l'homologie pour n'obtenir que le facteur du second degré, qui résout seul la question.

Je vous adresse, Monsieur, une solution analytique

(*) Cette solution a été donnée par MM. Mister et Neuberg, 2[e] série, t. II, p. 481 ; et par M. Paul Serret, 2[e] série, t. III, p. 49.

que j'ai eu l'occasion de donner à des élèves de Mathématiques spéciales. Je ne fais usage que de l'analyse la plus ordinaire; c'est un calcul très-simple, dans lequel le besoin de l'homologie ne se fait nullement sentir.

Soit $T = 0$ l'équation du système des deux tangentes menées à l'ellipse par le point $M(\alpha, \beta)$ qui correspond à l'un des cercles.

Soient en outre $P = 0$, $Q = 0$ les polaires de ce point dans l'ellipse et dans le cercle. Ces deux courbes peuvent être représentées par les équations

$$T + \lambda P^2 = 0, \tag{1}$$

$$T + \mu Q^2 = 0, \tag{2}$$

λ et μ étant deux paramètres à déterminer.

En retranchant, on a

$$P\sqrt{\lambda} = \pm Q\sqrt{\mu},$$

équation d'un système de cordes communes. Prenons, pour la droite AB,

$$P\sqrt{\lambda} = Q\sqrt{\mu}. \tag{3}$$

Soit maintenant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{4}$$

l'équation de l'ellipse. Alors

$$T = (\beta^2 - b^2)(x - \alpha)^2 - 2\alpha\beta(x - \alpha)(y - \beta) + (\alpha^2 - a^2)(y - \beta)^2,$$

$$P = \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1.$$

Pour identifier les équations (1) et (4), il suffit d'annuler, dans la première, le coefficient de xy; il en résulte

$$\lambda = a^2 b^2.$$

Soit d'ailleurs $Q = y + px + q$. L'équation (3) devient

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) ab = (y + px + q)\sqrt{\mu},$$

et si l'on désigne par x_1, y_1 les coordonnées à l'origine de la droite AB, on a

$$\left(\frac{\alpha x_1}{a^2} - 1\right) ab = (px_1 + q)\sqrt{\mu},$$

$$\left(\frac{\beta y_1}{b^2} - 1\right) ab = (y_1 + q)\sqrt{\mu}.$$

En retranchant, on élimine q, et il vient

$$\left(\frac{\alpha x_1}{a^2} - \frac{\beta y_1}{b^2}\right) ab = (px_1 - y_1)\sqrt{\mu},$$

équation où n'entre que le rapport $\frac{y_1}{x_1}$, et qui montre par là que le lieu cherché ne dépend que de la direction de AB. Soit $m = -\frac{y_1}{x_1}$ le coefficient angulaire de cette direction. L'équation ci-dessus devient

$$\left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta m}{b^2}\right) ab = (p + m)\sqrt{\mu}.$$

Exprimons maintenant que la courbe (2) est un cercle; il vient

$$\beta^2 - \alpha^2 + a^2 - b^2 = \mu(1 - p^2),$$

$$p = \frac{\alpha\beta}{\mu}.$$

Substituons cette valeur de p dans les deux équations qui précèdent, on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta m}{b^2}\right) ab = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\mu}} + m\sqrt{\mu}, \\ &\beta^2 - \alpha^2 + a^2 - b^2 = \mu - \frac{\alpha^2\beta^2}{\mu}, \end{aligned} \right.$$

et il faut, entre ces deux équations, éliminer μ. La première donne deux valeurs pour $\sqrt{\mu}$.

1° $\sqrt{\mu} = \beta \frac{a}{b}$. Cette valeur doit être rejetée; car, substituée dans la deuxième des équations (5), elle conduit à $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$, qui n'est autre chose que l'ellipse donnée.

2° $\sqrt{\mu} = \alpha \frac{b}{am}$. Celle-ci donne

$$\frac{\alpha^2}{a^2 m^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 m^2 + b^2}.$$

Telle est l'équation du lieu demandé. C'est une hyperbole homofocale à l'ellipse donnée.