NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JAMET

Démonstration d'un théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 35-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__35_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. JAMET,

Élève du lycée de Pau.

Si, du centre O *du cercle circonscrit à un triangle* ABC, *on abaisse sur les côtés* BC, AC, AB *du triangle des perpendiculaires* OD, OE, OF, *la somme de ces trois perpendiculaires est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle.*

Soient ω le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (*); M le point où le prolongement de la droite OD perpendiculaire à BC rencontre la circonférence circonscrite au triangle; ωH la perpendiculaire abaissée du

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

centre ω sur le côté BC; K la projection de ω sur ODM. Les droites ωH, OM sont des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC; il s'agit donc de démontrer que

$$(1) \quad \begin{cases} OD + OE + OF = \omega H + OM, \\ \text{ou} \\ OE + OF = \omega H + OM - OD. \end{cases}$$

Mais $OM - OD = DM$, et $\omega H + DM = DK + DM = KM$; par conséquent, l'égalité (1) en démonstration revient à

$$(2) \qquad OE + OF = KM.$$

Cela admis, menons par le point M, milieu de l'arc BMC, la corde MA' parallèle au côté BA du triangle ABC, et prolongeons la droite OF perpendiculaire sur BA, jusqu'à ce qu'elle rencontre, en un point E', la parallèle MA' à BA : il en résultera $MA' = AC$, et $OE' = OE$. Ce qui réduit l'égalité (2) $OE + OF = KM$ à $OE' + OF = KM$, et, par suite, à

$$(3) \qquad FE' = KM.$$

Or, en abaissant du point A une perpendiculaire AG sur la corde MA', on formera un triangle rectangle AGA' qui sera égal au triangle rectangle MωK. En effet, $AA' = MB = M\omega$; et, d'autre part, chacun des deux angles AA'G, MωK est égal à $C + \frac{1}{2}A$, comme il est facile de s'en assurer; donc les triangles rectangles AA'G, MωK sont égaux, et l'on a

$$AG = KM,$$

d'où

$$FE' = KM.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.