NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. MANSION

Sur la méthode de Brisson pour intégrer les équations différentielles à coefficients constants, à propos d'une question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 118-121

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__118_0>

SUR LA MÉTHODE DE BRISSON

pour intégrer les équations différentielles à coefficients constants, à propos d'une question de licence;

PAR M. P. MANSION,
Professeur à l'Université de Gand.

Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x} + \mathrm{C}\sin x + \mathrm{D}\cos x.$$

1. Cette question a été résolue par MM. Graindorge et Moret-Blanc (*Nouvelles Annales*, p. 111 et 321; 1871). Le premier a employé *la méthode de la variation des constantes arbitraires*, ce qui le conduit à des calculs assez compliqués. Le second devine la forme d'une solution particulière, ce qui lui permet d'arriver à la solution d'une manière très-expéditive.

M. Michaëlis a montré (*Mémoires de la Société des Sciences du Luxembourg*, t. VIII) qu'il existait une règle générale pour découvrir une solution particulière semblable dans tous les cas analogues; mais son travail, enfoui dans un recueil peu répandu, ne semble pas avoir été connu des auteurs des derniers traités de calcul intégral, de M. Serret, par exemple.

Il existe une méthode d'intégration des équations linéaires à coefficients constants, qui conduit, d'une manière plus simple que celle de M. Michaëlis, à la même règle générale. Cette méthode est due au géomètre français Brisson. Cauchy en a signalé la fécondité (*Exercices de*

Mathématiques, t. II, p. 175), et elle est très-connue en Angleterre, où elle a été *réinventée* par Boole (*A Treatise on differential equations*, 2e édition, p. 391; 1865). Dans une petite Note, imprimée dans les Mémoires in-8° de Bruxelles, t. XXII, nous avons démontré, au moyen de cette méthode, la règle générale dont nous parlions tantôt; autrement dit, nous avons donné la forme de l'intégrale générale des équations linéaires à coefficients constants, dont le second membre est une somme d'expressions de la forme

$$e^{mx}(A + Bx + Cx^2 + \ldots),$$

m étant réel ou imaginaire. Cette méthode étant très-peu connue, nous allons l'exposer sur le cas particulier dont MM. Graindorge et Moret-Blanc ont donné la solution; comme elle est extrêmement simple, chacun rétablira aisément la théorie complète.

2. *Notations*. Au lieu de

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} + ay, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by,$$

nous écrirons, quand a et b sont des constantes,

$$Dy, \quad (D + a)y, \quad D^2y, \quad (D^2 + aD + b)y.$$

Les expressions

$$D + a, \quad D^2 + aD + b$$

seront appelées *facteurs symboliques*; une *multiplication symbolique* sera l'opération que l'on doit faire sur y, au moyen des facteurs symboliques

$$D + a, \quad D^2 + aD + b,$$

pour en déduire

$$Dy + ay, \quad D^2y + aDy + by.$$

Il est clair que, par convention, *la multiplication symbolique se fait absolument comme une multiplication ordinaire.* On a aussi, k étant constant,

$$(D + a)kz = Dkz + akz = k(D + a)z.$$

Donc *on peut intervertir ou changer de place un facteur constant k et un facteur symbolique* $D + a$. Puis

$$(D + a)(y_1 + y_2 - y_3) = (D + a)y_1 + (D + a)y_2 - (D + a)y_3.$$

La multiplication d'une somme par un facteur symbolique se fait comme une multiplication ordinaire.

3. D'après ce qui précède, on comprend la signification des expressions suivantes

$$(D - a)(D - b)y, \quad (D - a)(D - b)(D - c)y, \ldots.$$

On indique simplement par là que l'on doit effectuer successivement plusieurs multiplications symboliques. Il est clair que *ces multiplications se font encore comme les multiplications ordinaires*, puisqu'il en est ainsi de chacune en particulier. Ainsi, on aura

$$(D - a)(D - b)y = [D^2 - (a + b)D + ab]y.$$

Réciproquement, une expression

$$(D^2 + AD + B)y$$

pourra se décomposer, comme en algèbre, en facteurs,

$$(D - a)(D - b)y,$$

si a et b sont les racines de l'équation

$$D^2 + AD + B = 0,$$

où D est l'inconnue, A et B étant donc tels que

$$A = -a - b, \quad B = ab.$$

4. Cela posé, l'équation donnée en tête de cet article se met sous la forme

$$(D^4 - 2D^2 + 1)y = X,$$

X désignant le second membre; ou encore

$$(D + 1)(D + 1)(D - 1)(D - 1)y = X.$$

Posons

$$(1) \qquad (D - 1)y = y_1,$$

$$(2) \qquad (D - 1)y_1 = y_2,$$

$$(3) \qquad (D + 1)y_2 = y_3;$$

elle deviendra successivement

$$(D + 1)(D + 1)(D - 1)y_1 = X,$$

$$(D + 1)(D + 1)y_2 = X,$$

$$(4) \qquad (D + 1)y_3 = X.$$

Les équations (4), (3), (2), (1), *toutes linéaires et du premier ordre,* donnent sans peine successivement y_3, y_2, y_1, y.

Toute équation linéaire à coefficients constants peut ainsi se ramener à un système d'équations simultanées du premier ordre.

Brisson a inventé une seconde méthode d'intégration encore plus ingénieuse que la précédente. Elle se trouve aussi exposée dans Cauchy et dans Boole.

Gand, 2 janvier 1872.