

A. DE SAINT-GERMAIN

**Sur la résolution trigonométrique de
l'équation du troisième degré**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 63-66

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__63_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA RÉOLUTION TRIGONOMETRIQUE DE L'ÉQUATION
DU TROISIÈME DEGRÉ;**

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Un des procédés les plus simples pour le calcul logarithmique des racines de l'équation du troisième degré, quand elles sont toutes réelles, est fourni par la comparaison de l'équation proposée avec celle qui donne $\cos \frac{1}{3} a$ en fonction de $\cos a$. Je veux faire remarquer que la même méthode conduit aux formules employées ordinairement pour le calcul logarithmique des racines quand deux d'entre elles sont imaginaires. Seulement nous aurons à employer des arcs imaginaires, dont le cosinus se définira, en vertu de l'équation d'Euler, par l'identité

$$\cos u = \frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2}.$$

Comme on a d'ailleurs, quels que soient s et t ,

$$e^s e^t = e^{s+t},$$

la combinaison de ces deux formules donne

$$\begin{aligned} \cos(s + ti) &= \frac{1}{2} (e^{si-t} + e^{-si+t}) \\ &= \frac{1}{2} [e^{-t}(\cos s + i \sin s) + e^t(\cos s - i \sin s)], \end{aligned}$$

ou

$$(1) \quad \cos(s + ti) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cos s - i \frac{e^t - e^{-t}}{2} \sin s.$$

Soit l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

Nous savons que l'équation

$$(2) \quad x^3 - \frac{3}{4} \lambda^2 x - \frac{1}{4} \lambda^3 \cos a = 0$$

admet pour racines

$$(3) \quad x_1 = \lambda \cos \frac{a}{3}, \quad x_2 = \lambda \cos \frac{2\pi + a}{3}, \quad x_3 = \lambda \cos \frac{4\pi + a}{3}.$$

Si donc on identifie l'équation proposée avec (2), elle aura les mêmes racines qui nous sont connues, et nous pourrons les calculer par logarithmes. Il suffit pour cette identification de prendre

$$(4) \quad \lambda = 2 \sqrt{\frac{-p}{3}}, \quad \cos a = \frac{3q}{2p \sqrt{\frac{-p}{3}}};$$

λ et a ne seront réels que si les trois racines de la proposée le sont elles-mêmes.

Dans le cas d'une seule racine réelle, on remarquera que les sinus et cosinus des arcs imaginaires satisfaisant aux équations ordinaires de la Trigonométrie, on peut dire que l'équation (2) admet toujours les racines (3), quels que soient λ et a . En ne s'astreignant plus à les prendre réels, l'identification précédente reste possible, et les racines de la proposée ont toujours la forme (3); mais nous devons les expliciter, et pour cela distinguer deux cas, suivant le signe de p .

Soit $p < 0$, mais $4p^3 + 27q^2 > 0$. Les équations de condition (4) donnent pour λ et $\cos a$ des valeurs réelles; mais cette dernière plus grande que l'unité. On devra donc prendre a de la forme $s + ti$, et en vertu de l'égalité (1), la seconde condition (4) donnera

$$(5) \quad 2 \cos a = (e^t + e^{-t}) \cos s - i(e^t - e^{-t}) \sin s = \frac{3q}{p \sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Le second membre étant réel, le coefficient de i dans le premier doit s'annuler, ce qui exige ou $e^t = e^{-t}$, ou $\sin s = 0$. La première hypothèse donne $t = 0$, a réel, ce qui est inadmissible; il faut donc vérifier la seconde condition, et il suffit de prendre $s = 0$. L'équation (5) devient alors

$$e^t + e^{-t} = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Soit 3α l'une des deux racines réelles de cette équation, qu'on peut résoudre par logarithmes en posant

$$e^t = \cot \varphi, \quad e^{-t} = \tan \varphi, \quad e^t + e^{-t} = \frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

Les racines de l'équation proposée, qui ont toujours la forme (4), sont, eu égard à l'égalité (1),

$$x_1 = \lambda \cos \frac{a}{3} = \lambda \cos \alpha i = \sqrt{-\frac{p}{3}}(e^\alpha + e^{-\alpha}) = \sqrt{-\frac{p}{3}}(\sqrt[3]{\cot \varphi} + \sqrt[3]{\tan \varphi}),$$

$$x_2 = \lambda \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha i \right) = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left[-\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) - i \frac{\sqrt{3}}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \right],$$

$$x_3 = \lambda \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha i \right) = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left[-\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) + i \frac{\sqrt{3}}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \right].$$

On sait rendre ces formules calculables par logarithmes en posant

$$e^\alpha = \sqrt[3]{\cot \varphi} = \cot \theta,$$

et on retrouve le calcul connu, pour la première racine, qui est réelle, et les deux autres imaginaires.

Dans le cas où p est positif, les conditions (4) donnent pour λ et $\cos a$ des valeurs imaginaires, sans partie réelle; l'angle a se déterminera encore par l'équation (5); mais ici c'est la partie réelle du premier membre qui doit dis-

paraître, et il suffit pour cela de poser $s = \frac{\pi}{2}$. Si on introduit le même angle φ que précédemment, l'équation (5) devient

$$e^t - e^{-t} = 2 \cot 2\varphi = \frac{3q}{p \sqrt{\frac{p}{3}}}.$$

Désignons encore par 3α la racine réelle de cette équation, ce qui donne

$$a = \frac{\pi}{2} + 3\alpha i,$$

les racines de la proposée seront

$$x_1 = \lambda \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha i \right) = \sqrt{\frac{p}{3}} \left[i \frac{\sqrt{3}}{2} (e^a + e^{-a}) + \frac{1}{2} (e^a - e^{-a}) \right],$$

$$x_2 = \lambda \cos \left(\frac{5\pi}{6} + \alpha i \right) = \sqrt{\frac{p}{3}} \left[-i \frac{\sqrt{3}}{2} (e^a + e^{-a}) + \frac{1}{2} (e^a - e^{-a}) \right],$$

$$x_3 = \lambda \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha i \right) = \sqrt{\frac{p}{3}} (e^{-a} - e^a) = -\sqrt{\frac{p}{3}} (\sqrt[3]{\cot \varphi} - \sqrt[3]{\tan \varphi}).$$

On saura encore rendre ces formules calculables par logarithmes, et la troisième racine se présentera seule comme réelle.