NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 36-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__36_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 207

(voir 1re serie, t VIII, p 108),

PAR M. CHARLES BRISSE.

Étant donné un triangle plan, soient trois paraboles, ayant même foyer, dont chacune est touchée par deux côtés du triangle; si l'on mène à la première de ces paraboles la tangente qui coupe perpendiculairement *le troisième côté du triangle, et, de même pour les deux autres, les trois droites qu'on obtient ainsi seront toutes tangentes à la même parabole, homofocale avec les trois autres.* (STREBOR.)

Transformons par polaires réciproques ce théorème connu : *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.* Nous obtiendrons, en nous rappelant que *l'angle compris entre deux droites est égal à l'angle que forment les rayons vecteurs menés de l'origine aux points correspondants* (*), la proposition suivante :

Étant donné un triangle ABC *et un point* O *dans son plan, si l'on élève par ce point des perpendiculaires aux droites* OA, OB, OC *jusqu'à leur rencontre avec les côtés opposés, les trois points ainsi obtenus seront en ligne droite.*

Transformons cet énoncé par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point O pour origine, il prendra la forme suivante :

Étant donnés trois cercles qui se coupent en un même point O, *si l'on élève par ce point des perpendiculaires aux cordes communes* OA, OB, OC *des cercles pris deux à deux, jusqu'à leurs rencontres respectives avec les cercles* OBC, OCA, OAB, *les trois points ainsi obtenus seront avec* O *sur un même cercle.*

Transformons enfin par polaires réciproques ce dernier théorème, en prenant le point O pour origine, et nous obtiendrons précisément celui qui fait l'objet de la question 207.

(*) SALMON, *Sections coniques*, édition française; Paris, Gauthier-Villars.

Question 234

(voir 1^re^ série, t. X, p. 183);

PAR UN ABONNÉ.

Soit l'équation

$$(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_{2n-1})$$
$$+b^m(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2n})=0;$$

b est un nombre positif; m un nombre entier positif; les $2n-1$ différences a_1-a_2, a_2-a_3, $a_3-a_4,\ldots$, $a_{2n-1}-a_{2n}$ sont positives; les n racines de l'équation sont réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, a_5 et $a_6,\ldots$. (RICHELOT.)

Des inégalités

$$\begin{gathered}a_1-a_2>0,\\ a_2-a_3>0,\\ \ldots\ldots\ldots,\\ a_{2p-1}-a_{2p}>0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{2n-1}-a_{2n}>0,\end{gathered}$$

on conclut les suivantes :

$$\begin{array}{ll}a_1-a_{2p}>0, & a_{2p-1}-a_{2p}>0,\\ a_2-a_{2p-1}>0, & a_{2p}-a_{2p+1}>0,\\ a_3-a_{2p}>0, & a_{2p-1}-a_{2p+2}>0,\\ a_4-a_{2p-1}>0, & a_{2p}-a_{2p+3}>0,\\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{2p-2}-a_{2p-1}>0, & a_{2p}-a_{2n-1}>0,\\ a_{2p-1}-a_{2p}>0, & a_{2p-1}-a_{2n}>0.\end{array}$$

Substituons a_{2p-1} à x dans le premier membre de l'équation proposée, nous aurons à chercher le signe du produit

$$b^m(a_{2p-1}-a_2)(a_{2p-1}-a_4)\ldots$$
$$(a_{2p-1}-a_{2p-2})(a_{2p-1}-a_{2p})\ldots(a_{2p-1}-a_{2n}).$$

Abstraction faite de b^m, les $p-1$ premiers facteurs sont négatifs, tous les autres sont positifs; le résultat a donc le signe de la quantité

$$(-1)^{p-1}.$$

Substituons maintenant a_{2p}, nous aurons à chercher le signe du produit

$$(a_{2p}-a_1)(a_{2p}-a_3)\ldots(a_{2p}-a_{2p-1})(a_{2p}-a_{2p+1})\ldots(a_{2p}-a_{2n-1}).$$

Les p premiers facteurs sont négatifs, tous les autres sont positifs; le résultat a donc le signe de la quantité

$$(-1)^p.$$

Les résultats des deux substitutions étant de signes contraires, l'équation a une racine comprise entre a_{2p-1} et a_{2p}; d'où l'on conclut qu'elle a toutes ses racines réelles et comprises respectivement entre a_1 et a_2, a_3 et $a_4, \ldots, a_{2n-1}$ et a_{2n}.

Questions 877 *et* 876

(voir 2e série, t. VII, p. 239);

PAR M. MOREL,

Répetiteur à Sainte-Barbe.

877. *Lorsque la réduction d'une fraction $\frac{a}{b}$ en décimales conduit à une période de n chiffres, toute fraction irréductible dont le dénominateur égale un multiple de b donne lieu à une période dont le nombre de chiffres est égal à un multiple de n.*

(LIONNET, *Algèbre*, 3e édit.)

Lorsqu'une fraction irréductible est de la forme $\frac{c}{mb}$, on peut la considérer comme la somme de deux fractions $\frac{x}{m}$, $\frac{y}{b}$. En effet, la résolution de l'équation

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{b}=\frac{c}{mb}$$

revient à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$bx+my=c,$$

question qui admet, en général, au moins une solution. Si maintenant je suppose que la fraction $\frac{x}{m}$ soit périodique, et que sa période soit *hjkl*, celle de $\frac{y}{b}$ étant *pqrstv*, nous aurons

$$\frac{y}{b}=0,\ pqrs\,tvpq\ rstv\ pqrs\,tvpq\,r\ldots,$$

$$\frac{x}{m}=0,\ hjkl\ hjkl\ hjkl\,hjkl\ hjkl\,h\ldots.$$

En faisant la somme de ces deux fractions, nous aurons une nouvelle fraction périodique, puisque nous retrouverons périodiquement les mêmes sommes à faire, et cela lorsque nous aurons pris un nombre exact de périodes de chaque côté. Donc $\frac{c}{bm}$ sera bien une fraction périodique dont le nombre de chiffres sera un multiple de n.

Si m était seulement composé des facteurs 2 et 5, ou, plus généralement, des facteurs de la base de numération, la fraction $\frac{c}{mb}$ aurait encore n chiffres à la période; mais l'origine de la période serait reculée d'autant de chiffres qu'il y en aurait dans la réduction en décimales de la fraction $\frac{x}{m}$.

876. 1020 *étant le dénominateur d'une fraction irréductible, pourquoi le nombre des chiffres de la période engendrée par cette fraction sera-t-il un des nombres* 1, 2, 4, 8, 16, 32? (LIONNET, *Algèbre*, 3e édit.)

Le nombre 1020 étant égal au produit $20 \times 3 \times 17$, on aura

$$A = \frac{a}{20} + \frac{b}{3} + \frac{c}{17},$$

A, a, b, c étant premiers respectivement avec 1020, 20, 3, 17.

La fraction $\frac{a}{20}$ étant limitée n'influera pas sur le nombre des chiffres de la période. Mais les fractions périodiques $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{17}$ peuvent avoir pour nombres de chiffres à la période

$\frac{b}{3}$, 1 ou 2 chiffres,

$\frac{c}{17}$, 1, 2, 4, 8, 16 chiffres.

Le nombre des chiffres de la somme $\frac{b}{3} + \frac{c}{17}$ ne pourra être que l'un des nombres obtenus en multipliant les nombres relatifs à $\frac{c}{17}$ par ceux relatifs à $\frac{b}{3}$. On aura ainsi l'un des nombres 1, 2, 4, 8, 16 ou 32, et pas d'autres.

Remarque. — Le nombre de chiffres correspondant à la fraction $\frac{c}{17}$ est 16; le nombre de chiffres pour $\frac{b}{3}$ est 1; donc le nombre cherché sera 16. En outre, la fraction $\frac{a}{20}$

donnera deux chiffres, puisqu'elle est égale à $\frac{5a}{100}$; donc la fraction $\frac{A}{1020}$ sera une fraction décimale périodique mixte, ayant deux chiffres à la partie non périodique et 16 à la période.

Vérification :

$$\frac{173}{1020} = 0{,}169607843137254901960784 3\ldots$$

Question 949

voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 335);

PAR M. P. MEUTZNER,

Étudiant à Leipzig.

Trouver toutes les courbes planes pour lesquelles la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante. On compte la normale du point de la courbe à une droite fixe donnée et le rayon vecteur du point de la courbe à un point fixe pris pour pôle. Les coniques donnent une solution particulière. (GENOCCHI.)

Soit b la distance du point fixe à la droite fixe. Par le point fixe, pris pour pôle, menons une parallèle à la droite fixe et prenons-la pour axe polaire. Soit k la valeur constante de la projection de la normale sur le rayon vecteur.

En désignant par r et φ les coordonnées polaires d'un point quelconque de la courbe, l'équation différentielle de cette courbe sera

$$-\frac{dr}{r^2 d\varphi} = \frac{1}{k}\operatorname{tang}\varphi + \frac{b}{k}\frac{1}{r\cos\varphi} - \frac{1}{r}\operatorname{tang}\varphi.$$

Posons

$$\frac{1}{r} = \eta,$$

il viendra

$$(1) \qquad \frac{dn}{d\varphi} = \frac{1}{k}\,\mathrm{tang}\,\varphi + \frac{n}{\cos\varphi}\left(\frac{b}{k} - \sin\varphi\right).$$

Si nous prenons d'abord l'équation différentielle

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{n}{\cos\varphi}\left(\frac{b}{k} - \sin\varphi\right),$$

elle donne par l'intégration

$$n = \gamma\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^{\frac{k}{b}}\cos\varphi,$$

γ étant une constante arbitraire.

Nous cherchons maintenant, par la méthode de la variation des constantes arbitraires, à satisfaire à l'équation (1) en regardant γ comme une fonction de φ. Nous trouvons, en posant

$$1 + \sin\varphi = u \quad \text{et} \quad \frac{\mu - 3}{2} = \alpha,$$

la quadrature

$$k\gamma = \int \frac{(2-u)^{\alpha}(u-1)\,du}{u^{\alpha+3}}.$$

Elle peut facilement s'effectuer et donne

$$k\gamma = -\frac{1}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\,\frac{(2-u)^{\alpha+1}}{u^{\alpha+2}}\left[(2\alpha+3)u - 2(\alpha+1)\right] + kC,$$

C étant une constante arbitraire. Remplaçons u et α par leurs valeurs, nous aurons donc

$$\gamma = \frac{1}{k^2 - b^2}\,\frac{b\sin\varphi + k}{1+\sin\varphi}\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^{\frac{b-k}{2k}} + C.$$

Par conséquent, l'équation des courbes cherchées est

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = \left[\frac{1}{k^2 - b^2}\,\frac{b\sin\varphi + k}{1+\sin\varphi}\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^{\frac{b-k}{2k}} + C\right]\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^{\frac{b}{k}}\cos\varphi.$$

Si nous supposons $b = 0$, l'équation (2) devient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k} + \mathrm{C}\cos\varphi,$$

ou bien

$$(3) \qquad r = \frac{k}{1 + k\mathrm{C}\cos\varphi}.$$

On voit que c'est l'équation d'une conique. On a en coordonnées rectangulaires

$$(4) \qquad (1 - k^2c^2)x^2 + y^2 = k^2(1 - 2\mathrm{C}x).$$

L'équation (2) montre qu'on n'obtient aucune solution en faisant $b = k$. Ce cas doit être traité à part. L'équation différentielle devient, dans l'hypothèse où $b = k$,

$$(5) \qquad \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{1}{k}\operatorname{tang}\varphi + \frac{\eta}{\cos\varphi}(1 - \sin\varphi).$$

En intégrant, on obtient

$$(6) \qquad \frac{4k\eta - 2}{1 + \sin\varphi} = \mathrm{l}\,\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} + \mathrm{C}$$

pour l'équation des courbes satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Question 971

(voir 2^e série, t. VIII, p. 562);

PAR M. A. MOREL,

Répétiteur à Sainte-Barbe.

Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

(H. BROCARD.)

Il est d'abord évident qu'il suffit de chercher les nombres proposés parmi les nombres inférieurs à 100. En effet, prenons un nombre supérieur à 100; appelons α le nombre formé par les centaines, et β le nombre formé par les unités, de telle sorte que l'on ait

$$A = \alpha \times 100 + \beta.$$

On aura

$$A^2 = (\alpha \times 100 + \beta)^2 = \alpha^2 \times 100^2 + 2\alpha\beta \times 100 + \beta^2.$$

Si donc β^2 est terminé par deux chiffres égaux, il en sera de même de A^2, puisque la valeur de α ne peut influer que sur les centaines.

Si maintenant β est un nombre inférieur à 25 qui jouisse de cette propriété, nous aurons, jouissant de la même propriété, les nombres $50 - \beta$, $50 + \beta$ et $100 - \beta$. En effet, on a

$$(50 \pm \beta)^2 = 2500 \pm 100\beta + \beta^2.$$

Donc les deux derniers chiffres de $(50 \pm \beta)^2$ sont les mêmes que ceux de β^2. Il nous suffit donc de chercher parmi les nombres inférieurs à 25 ceux qui jouissent de la propriété demandée. Nous pouvons exclure immédiatement les nombres terminés par 5, dont le carré est terminé par 25, et les nombres terminés par un zéro, qui ont toujours leurs carrés terminés par deux zéros. Il nous reste donc à essayer les nombres 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24. Les trois premiers, n'ayant qu'un chiffre au carré, doivent être exclus.

Parmi les dix-sept nombres qui nous restent, nous n'avons que le nombre 12 dont le carré 144 soit terminé par deux chiffres égaux. Nous trouverons donc les nombres 12, 38, 62, 88, dont le carré soit terminé par deux chiffres égaux; nous remarquerons en outre que ces chiffres sont deux 4.

Donc

Tout nombre terminé par 12, 38, 62, 88 *aura son carré terminé par* 44; *ces nombres seuls ont leur carré terminé par deux chiffres égaux.*

Question 983

(voir 2e série, t. IX, p. 93);

PAR M. A. MOREL.

Imaginons deux ellipses concentriques, l'une intérieure, l'autre extérieure, dont les axes ont les mêmes directions. Cela posé, quelles relations doivent exister entre les demi-axes de ces deux ellipses pour que la courbe polaire réciproque d'une d'elles par rapport à l'autre soit un cercle de rayon donné?

(HARKEMA.)

Première solution. — Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0 \tag{2}$$

les équations des deux coniques. Soit (α, β) un point du lieu cherché. Ce point ayant pour polaire par rapport à la courbe (1) une tangente à la courbe (2), on aura les relations

$$\frac{\dfrac{\alpha}{a^2}}{\dfrac{x}{a'^2}}=\frac{\dfrac{\beta}{b^2}}{\dfrac{y}{b'^2}}=1; \tag{3}$$

on tire de ces relations

$$\frac{x}{a'}=\frac{a'\alpha}{a^2},\quad \frac{y}{b'}=\frac{b'\beta}{b^2}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (2), on aura, pour la polaire réciproque de cette courbe,

$$\frac{a'^2\alpha^2}{a^4}+\frac{b'^2\beta^2}{b^4}-1=0,$$

ou

$$a'^2b^4\alpha^2+b'^2a^4\beta^2-a^4b^4=0.$$

Cette courbe sera un cercle si l'on a

$$a'^2b^4=b'^2a^4;$$

son rayon sera, en outre, égal à r si l'on a

$$\frac{a^4}{a'^2}=r^2.$$

Cette dernière condition nous donne, en ne prenant que les valeurs absolues,

$$a'=\frac{a^2}{r};$$

on trouverait de même

$$b'=\frac{b^2}{r}.$$

Deuxième solution. — La polaire réciproque d'une conique étant une autre conique, la polaire réciproque de A′ par rapport à A sera une ellipse, puisque la courbe A′ ne passe pas par le centre de A, et que, par suite, sa courbe réciproque n'a pas de point à l'infini. En outre, la courbe A′ étant symétrique par rapport aux axes, sa réciproque le sera également. Cette courbe sera un cercle si les segments qu'elle intercepte sur les axes sont égaux. Soit r le segment intercepté sur chaque axe; on doit avoir les relations

$$a'r=a^2,\quad b'r=b^2,$$

ce qui donne les relations trouvées précédemment.

Si l'on voulait, en outre, que le cercle fût la polaire réciproque de l'une quelconque des deux courbes par rapport à l'autre, il faudrait que l'on eût

$$a'r = a^2, \quad b'r = b^2,$$

avec

$$ar = a'^2, \quad br = b'^2;$$

ce qui exigerait que l'on eût

$$a = a', \quad b = b' \quad \text{et} \quad a = b.$$

Dans ce cas, les deux coniques se réduisent à deux cercles égaux et concentriques, et, si nous prenons un point et la tangente en ce point, l'enveloppe de cette tangente est le cercle lui-même, qui répond ainsi à la question.