

MORET-BLANC

Question de licence (session du 4 juillet 1870)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10 (1871), p. 321-323

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__321_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE LICENCE (*)

(session du 4 juillet 1870);

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre

Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x;$$

A, B, C, D sont des constantes.

J'intègre d'abord l'équation privée de second membre

$$(a) \quad \frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Si l'on pose $y = e^{rx}$, on aura

$$r^4 - 2r^2 + 1 = (r^2 - 1)^2 = 0.$$

Cette équation a deux racines doubles $+1$ et -1 .

(*) Voir une première solution, même tome, page 111.

L'intégrale générale de l'équation (a) est donc

$$y = (M + Px)e^x + (N + Qx)e^{-x},$$

M, N, P, Q désignant quatre constantes arbitraires.

En ajoutant à cette intégrale une intégrale particulière de l'équation proposée, on aura l'intégrale générale de celle-ci. Le second membre de la proposée ne renfermant que des exponentielles et des sinus et cosinus, qui se reproduisent dans les différentiations successives, l'équation admet une intégrale de même forme.

Je pose donc, en remarquant que les termes en e^x , e^{-x} , xe^x , xe^{-x} se détruiraient dans l'équation différentielle, en vertu de l'intégrale de l'équation (a),

$$y_1 = Gx^2e^x + Hx'e^{-x} + K \sin x + L \cos x;$$

d'où

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} - 2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + y_1 = 8G e^x + 8H e^{-x} + 4K \sin x + 4L \cos x.$$

Identifiant le second membre avec celui de l'équation proposée, on en déduit

$$G = \frac{A}{8}, \quad H = \frac{B}{8}, \quad K = \frac{C}{4}, \quad L = \frac{D}{4}.$$

L'intégrale générale cherchée est donc

$$y = \left(M + Px + \frac{A}{8} x^2 \right) e^x + \left(N + Qx + \frac{B}{8} x^2 \right) e^{-x} \\ + \frac{C}{4} \sin x + \frac{D}{4} \cos x;$$

car elle satisfait à l'équation différentielle proposée, et renferme quatre constantes arbitraires.

Remarque. — Cette méthode pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants pourvues de second membre peut s'appliquer toutes les fois que ce

second membre ne renferme que des termes qui peuvent provenir par différentiation des termes de même forme : tels sont les monômes algébriques, les exponentielles, les sinus et cosinus.

Note. — La même question a été résolue par M. Charve.