NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Analyse indéterminée, problèmes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 295-301
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__295_1>

ANALYSE INDÉTERMINÉE;

Problèmes,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

PROBLÈME. — *Trouver trois nombres entiers, différents de zéro, dont les carrés soient en proportion arithmétique.*

Soient x, y, z trois nombres répondant à la question, on a

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = y^2 - z^2,$$

d'où

$$2y^2 = x^2 + z^2.$$

Multiplions les deux membres de cette dernière équation par 2, il vient

$$4y^2 = 2x^2 + 2z^2,$$

ou bien

$$4y^2 = (x+z)^2 + (x-z)^2,$$

ou enfin

$$(2) \qquad y^2 = \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-z}{2}\right)^2.$$

Cela posé, soient a, b, c trois nombres entiers, tels que

$$(3) \qquad b^2 = a^2 + c^2.$$

Posons

$$y = b,$$

$$\frac{x+z}{2} = a,$$

$$\frac{x-z}{2} = c,$$

ce qui nous donne

$$y = b,$$

$$x = a + c,$$

$$z = a - c;$$

Les entiers a, b, c satisfaisant à l'équation (3), les valeurs précédentes de x, y, z, lesquelles sont entières, satisferont à l'équation (2), et, par suite, à l'équation (1). Donc elles répondront à la question.

Remarque. — Toute solution de l'équation

$$b^2 = a^2 + c^2,$$

c'est-à-dire, suivant l'expression consacrée, tout triangle rectangle en nombres fournira une solution de la question proposée. Or, il existe une infinité de triangles rectangles en nombres; donc le problème considéré admet une infinité de solutions.

Application. — Soit le triangle rectangle

$$5^2 = 4^2 + 3^2;$$

on en déduit

$$x = 7, \quad y = 5, \quad z = 1;$$

donc

$$7^2, \quad 5^2, \quad 1^2$$

forment une proportion arithmétique.

II.

Problème. — *Trouver trois nombres entiers différents de zéro, dont les carrés forment une proportion harmonique.*

On sait que *si trois nombres sont en proportion arithmétique, leurs produits deux à deux sont en proportion harmonique*. Il suffit donc, pour résoudre le problème actuel, de trouver trois carrés en proportion arithmétique, et de former leurs produits deux à deux.

Le problème actuel est ainsi ramené au problème précédent. Il admet aussi une infinité de solutions.

Applications. — On a vu que

$$7^2, \quad 5^2, \quad 1^2$$

sont en proportion arithmétique; donc

$$(7 \times 5)^2, \quad (7 \times 1)^2, \quad (5 \times 1)^2,$$

c'est-à-dire

$$35^2, \quad 7^2, \quad 5^2$$

sont en proportion harmonique.

III.

Problème. — *Résoudre en nombres entiers, différents de zéro, l'équation*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dans laquelle a représente un entier différent de zéro.

L'équation proposée peut s'écrire ainsi

$$(x - a)(y - a) = a^2.$$

Sous cette forme, elle montre que $x - a$ et $y - a$ sont deux diviseurs conjugués de a^2. A chaque couple d, d' de deux diviseurs conjugués correspondra donc une solution donnée par les formules

$$x - a = d,$$
$$y - a = d',$$

ou bien

$$x = a + d,$$
$$y = a + d'.$$

Le problème est ainsi ramené à la recherche (qu'on sait faire) des diviseurs de a^2.

Il est évident d'ailleurs que ce procédé donne toutes les solutions de l'équation proposée.

IV.

Remarque I. — Il faut exclure le couple de diviseurs conjugués

$$d = d' = -a,$$

vu qu'il donnerait

$$x = y = 0.$$

Remarque II. — Deux diviseurs conjugués d, d', ayant pour produit a^2, sont forcément de même signe. Quand les deux diviseurs conjugués sont de même signe que a, les valeurs correspondantes de x et de y sont aussi toutes deux de même signe que a. Dans le cas contraire, les valeurs de x et de y sont l'une positive, l'autre négative.

Remarque III. — Soit D le nombre des diviseurs positifs de a^2, le nombre des couples distincts de facteurs conjugués positifs, comme celui des couples distincts de facteurs conjugués négatifs, est égal à $\frac{D+1}{2}$. Il faut exclure le couple $d = d' = -a$, qui se trouve parmi ceux dont le signe est contraire à a. Il reste donc $\frac{D+1}{2}$ couples distincts de même signe que a, et $\frac{D-1}{2}$ couples distincts de signe contraire.

Par suite, le nombre des solutions où x et y sont de même signe est $\frac{D+1}{2}$, et celui des solutions où x et y sont de signes contraires est $\frac{D-1}{2}$.

Or,

$$\frac{D+1}{2} + \frac{D-1}{2} = D.$$

Donc *le nombre des solutions entières et différentes de zéro de l'équation* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ *est égal au nombre des diviseurs positifs de* a^2.

V.

Application. — Résoudre en nombres entiers différents de zéro l'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$.

Le carré de 10 admet 9 diviseurs positifs. Donc l'équation a 9 solutions, savoir 5 solutions où x et y sont de même signe, et 4 où ils sont de signes contraires. Ces 9 solutions donnent les 9 identités suivantes :

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{110}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{60}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{35}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{9}-\frac{1}{90}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{40}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}.$$

VI.

PROBLÈME. — *Trouver deux nombres entiers différents de zéro dont la somme soit une partie aliquote du produit.*

Cela revient à résoudre l'équation

$$x+y=\frac{xy}{a},$$

qui est identique à l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}.$$

Le problème actuel se résoudra donc comme le précédent; et il aura D solutions distinctes, D étant le nombre des diviseurs positifs de a^2.

Remarque. — Dans les deux derniers problèmes, le nombre des solutions, étant égal à D, est forcément impair.

Il se réduit à 3 lorsque a est premier, c'est-à-dire dans une infinité de cas. Mais il ne se réduit à 1 que dans les deux cas où a est égal à $+1$ ou à -1.

Il en résulte, en particulier, que ce problème : *Trouver deux nombres, entiers et différents de zéro, dont la somme égale le produit,* n'admet qu'une solution unique.

Cette solution est

$$x = y = 2.$$