GÉRONO

Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $(I)\ x^m = y^n + 1$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 204-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__204_1>

NOTE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS DE L'ÉQUATION (1) $x^m = y^n + 1$

(voir 2e série, t. IX, p. 469).

2. Lorsque l'inconnue y représente un nombre premier, la seule solution que l'équation (1) puisse admettre,

en valeurs entières plus grandes que l'unité, est, comme pour le cas de x premier,

$$x = 3,\ m = 2,\quad y = 2,\ n = 3.$$

La démonstration relative à ce second cas diffère peu de celle que nous avons donnée (n° 1) pour le premier.

L'équation $x^m = y^n + 1$ donne

$$(x-1)[\mathrm{M}(x-1)+m] = y^n,$$

où M désigne la partie entière du quotient de la division de $x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1$, par $x - 1$, et le reste, m, de cette division peut être considéré comme un nombre premier (*voir* le n° 1).

Le facteur $(x-1)$ représente un nombre entier supérieur à l'unité, car l'égalité $(x-1) = 1$ donnerait $x = 2$, et l'on sait déjà que x ne peut être égal à un nombre premier autre que 3 (*voir* le n° 1).

De là, on conclura (n° 1)

$$y = m = (x-1).$$

Par suite, l'équation proposée $x^m = y^n + 1$ devient

$$(y+1)^y = y^n + 1\,;$$

d'où

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = y^{n-y} + \frac{1}{y^y}.$$

Or, la valeur de $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ étant comprise entre 2 et 3, les deux nombres entiers y et n doivent satisfaire aux deux inégalités

$$y^{n-y} + \frac{1}{y^y} > 2, \quad \text{et} \quad y^{n-y} + \frac{1}{y^y} < 3,$$

ce qui exige qu'on ait $y = 2$ et $n = 3$. Il s'ensuit

$$m = 2,\quad x = 3.$$

Remarque. — Lorsque l'un des deux nombres x, y est premier, la résolution, en nombres entiers positifs et plus grands que l'unité, de l'équation $x^m = y^n + 1$ se ramène à celle de l'équation $x^y = y^x + 1$.