

GÉRONO

Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation (I) $x^m = y^n + 1$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10 (1871), p. 204-206

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__204_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS
DE L'ÉQUATION (1) $x^m = y^n + 1$**

(voir 2^e série, t. IX, p. 469').

2. Lorsque l'inconnue y représente un nombre premier, la seule solution que l'équation (1) puisse admettre.

en valeurs entières plus grandes que l'unité, est, comme pour le cas de x premier,

$$x = 3, m = 2, y = 2, n = 3.$$

La démonstration relative à ce second cas diffère peu de celle que nous avons donnée (n° 1) pour le premier.

L'équation $x^m = y^n + 1$ donne

$$(x - 1)[M(x - 1) + m] = y^n,$$

où M désigne la partie entière du quotient de la division de $x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1$, par $x - 1$, et le reste, m , de cette division peut être considéré comme un nombre premier (voir le n° 1).

Le facteur $(x - 1)$ représente un nombre entier supérieur à l'unité, car l'égalité $(x - 1) = 1$ donnerait $x = 2$, et l'on sait déjà que x ne peut être égal à un nombre premier autre que 3 (voir le n° 1).

De là, on conclura (n° 1)

$$y = m = (x - 1).$$

Par suite, l'équation proposée $x^m = y^n + 1$ devient

$$(y + 1)^y = y^n + 1;$$

d'où

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = y^{n-y} + \frac{1}{y^y}.$$

Or, la valeur de $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ étant comprise entre 2 et 3, les deux nombres entiers y et n doivent satisfaire aux deux inégalités

$$y^{n-y} + \frac{1}{y^y} > 2, \quad \text{et} \quad y^{n-y} + \frac{1}{y^y} < 3,$$

ce qui exige qu'on ait $y = 2$ et $n = 3$. Il s'ensuit

$$m = 2, \quad x = 3.$$

Remarque. — Lorsque l'un des deux nombres x , y est premier, la résolution, en nombres entiers positifs et plus grands que l'unité, de l'équation $x^m = y^n + 1$ se ramène à celle de l'équation $x^y = y^x + 1$.
