J. NEUBERG

Théorie des indices des points, des droits et des plans par rapport à une surface du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 360-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__360_1>

THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

(suite, voir 2ᵉ serie, t IX, p 317),

PAR M. J. NEUBERG,
Professeur a l'Athenee de Bruges (Belgique).

4. Considérons maintenant. sur une droite D coupant la surface f en deux points réels ou imaginaires M et M', les différents couples de points (A, A') conjugués avec f. Soient C le milieu de MM' ou le *point central* de D (point central de l'involution des points A, A'), $(I_a, I_{a'}, I_c)$ les indices de (A, A', C), et 2α, 2β les diamètres de la surface suivant les directions AA' et OC; nous aurons

$$I_a = \frac{AM.AM'}{\alpha^2} = \frac{AA'.AC}{\alpha^2}, \quad I_{a'} = \frac{A'A.A'C}{\alpha^2};$$

d'où

$$I_a I_{a'} = -\frac{AA'^2.CA.CA'}{\alpha^4}, \quad \frac{1}{I_a} + \frac{1}{I_{a'}} = \frac{\alpha^2}{AA'}\left(-\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'}\right).$$

Mais

$$CA.CA' = CM^2, \quad \frac{1}{CA'} - \frac{1}{CA} = \frac{A'A}{CA.CA'}, \quad I_c = -\frac{CM^2}{\alpha^2};$$

par conséquent

$$(5) \qquad \frac{I_a I_{a'}}{AA'^2} = -\frac{CM^2}{\alpha^4} = \frac{I_c}{\alpha^2},$$

$$(6) \qquad \frac{1}{I_a} + \frac{1}{I_{a'}} = \frac{1}{I_c}.$$

Appelons, avec M. Faure, *indice d'une droite* par rapport à f, le rapport que l'on obtient en divisant le carré de la demi-corde déterminée par cette droite dans la surface, par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à cette droite. Les égalités (5) et (6) pourront s'énoncer comme il suit :

Si l'on considère tous les couples de points conjugués situés sur une même droite : 1° *le produit des indices de deux points conjugués, divisé par le carré de la distance de ces points, est constant et égal à moins l'indice de la droite;* 2° *la somme des inverses des indices de deux points conjugués est constante et égale à l'inverse de l'indice du point central de la droite.*

Comme cas particulier de cette dernière propriété, on a celle des points réciproques renfermée dans l'égalité (4).

Soit C' le pôle de D dans la section centrale OMM'; ce point est le point central de la droite conjuguée avec D. Désignons par $I_{aa'}$ l'indice de D, par p et p' les perpendiculaires abaissées de O et de C' sur D, par A et B les axes de la section OMM'; nous aurons

$$I_c = \frac{CC'.CO}{\beta^2} = \frac{pp'}{\beta^2 \sin^2(\alpha, \beta)};$$

d'où

$$I_{aa'} = -\frac{pp'}{\alpha^2 \beta^2 \sin^2(\alpha, \beta)} = -\frac{pp'}{A^2 B^2}.$$

Par analogie, avec la définition de l'indice d'un plan (*voir* plus loin), le produit $(-pp')$ pourrait, dans la théorie des coniques, recevoir un nom particulier, par exemple celui de *caractéristique* de la droite.

5. Cherchons l'expression analytique de l'indice d'une droite D déterminée par deux points X $(x_1, \ldots)$ et Y $(y_1, \ldots)$. Soient (m_1, m_2, m_3) les cosinus directeurs de D, l la distance XY, et M, M' les points d'intersection de f et de D. Les distances XM et XM' seront les racines de l'équation

$$\rho^2 f(m) + \rho \Sigma x_1 f_1(m) + f(x) = 0.$$

Par conséquent

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = (\mathrm{XM}' - \mathrm{XM})^2 = \frac{\Sigma^2 x_1 f_1(m) - 4f(x)f(m)}{f^2(m)},$$

et, comme $\alpha^2 = -\dfrac{f(\beta)}{f(m)}$, nous aurons

$$\mathrm{I}_{xy} = \frac{\Sigma^2 x_1 f_1(m) - 4f(x)f(m)}{4f^2(\beta)}.$$

Mais $m_r = \dfrac{x_r - y_r}{l}$, $f_r(m) = \dfrac{f_r(x) - f_r(y)}{l}, \ldots$; donc, après quelques réductions faciles, il vient

$$\mathrm{I}_{xy} = \frac{\Sigma^2 x_1 f_1(y) - 4f(x)f(y)}{4\,l^2 f^2(\beta)},$$

valeur qui convient également aux coordonnées obliques et aux coordonnées tétraédriques, à cause du caractère *covariant* des quantités $f(x)$, $f(y)$, $\Sigma x_1 f_1(y)$ et $f(\beta)$ (*).

Le numérateur de I_{xy} peut prendre deux formes re-

(*) En supposant les points X, Y conjugués de manière que $\Sigma x_1 f_1(y) = 0$, on retrouve l'égalité (5). En égalant le numérateur de I_{xy} à zéro, on a la condition pour que la droite XY soit tangente à f_1, ou l'équation d'un cône circonscrit à f, si l'on regarde Y comme fixe et X comme variable.

marquables. Désignant l'*émanant* $\frac{1}{2}\Sigma x_1 f_1(y)$ par $F(xy)$, de manière que $F(xy) = F(yx)$ et $F(xx) = f(x)$, nous pourrons écrire

$$I_{xy} = \frac{-1}{l^2 f^2(\beta)} \begin{vmatrix} F(xx), & F(xy) \\ F(yx), & F(yy) \end{vmatrix}.$$

Représentons par H' le déterminant des éléments B_{rs}; nous aurons (*voir* Baltzer-Hoüel, p. 47, 51, 145 et 146)

$$H'\begin{pmatrix} H' & \begin{matrix} x\,y \\ x\,y \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H' & \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H' & \begin{matrix} y \\ y \end{matrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H' & \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \end{pmatrix}^2$$
$$= H^4[f(x)f(y) - F^2(xy)],$$
$$H' = H^3;$$

par suite

$$I_{xy} = \frac{-\begin{pmatrix} H' & \begin{matrix} x\,y \\ x\,y \end{matrix} \end{pmatrix}}{l^2 H f^2(\beta)}.$$

Supposons maintenant la droite D déterminée par l'intersection des deux plans $\Sigma p_1 x_1 = 0$, $\Sigma q_1 x_1 = 0$. Soient (z_1, z_2, z_3, z_4) les coordonnées du point central C de D. Les distances CM et CM' seront racines de l'équation

$$\rho^2 f(m) + \rho \Sigma z_1 f_1(m) + f(z) = 0,$$

et, comme $CM = -CM'$, on aura

$$\Sigma z_1 f_1(m) = 0, \quad CM^2 = -\frac{f(z)}{f(m)},$$

et par conséquent

$$I_{pq} = -\frac{f(z)f(m)}{f^2(\beta)}.$$

On a ici

$$m_1 = \frac{1}{L}\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \quad m_2 = \frac{1}{L}\begin{vmatrix} p_3 & q_3 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}, \quad m_3 = \frac{1}{L}\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix},$$

où L^2 désigne la somme des carrés des trois déterminants

$(p_2 q_3)$, $(p_3 q_1)$, $(p_1 q_2)$. Les coordonnées z résultent des équations $\Sigma p_1 z_1 = 0$, $\Sigma q_1 z_1 = 0$, $\Sigma z_1 f_1(m) = 0$; elles sont donc égales aux mineurs du système d'éléments

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & f_1(m) \\ p_2 & q_2 & f_2(m) \\ p_3 & q_3 & f_3(m) \\ p_4 & q_4 & f_4(m) \end{vmatrix}$$

multipliés par une certaine quantité μ, et, comme il faut avoir $x_4 = 1$, nous trouverons μ égal à l'inverse du quatrième mineur, qui, développé, est

$$(p_2 q_3) f_1(m) + (p_3 q_1) f_2(m) + (p_1 q_2) f_3(m),$$

ou $L \Sigma m_1 f_1(m)$, ou $2 L f(m)$. On reconnaît alors sans peine que

$$f(z) = \mu^2 \left(\mathrm{H} \begin{matrix} p\,q\,f'(m) \\ p\,q\,f'(m) \end{matrix} \right).$$

Dans le déterminant à droite, remplaçons m_4 par zéro, ajoutons les trois premières lignes multipliées par $-2m_1$, $-2m_2$, $-2m_3$ à la septième ligne, et opérons ensuite d'une manière semblable sur les colonnes; la ligne et la colonne extrêmes deviennent $0, 0, 0, 0$, $-2(p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3)$, $-2(q_1 m_1 + q_2 m_2 + q_3 m_3)$, $-4f(m)$; et, comme

$$p_1 (p_2 q_3) + \ldots = 0, \quad q_1 (p_2 q_3) + \ldots = 0,$$

il vient

$$f(z) = -4\mu^2 f(m) \left(\mathrm{H} \begin{matrix} p\,q \\ p\,q \end{matrix} \right)$$

et, à cause de $\mu = \dfrac{1}{2 L f(m)}$,

$$\mathrm{I}_{pq} = \frac{\left(\mathrm{H} \begin{matrix} p\,q \\ p\,q \end{matrix} \right)}{L^2 f^2(\beta)} = \frac{\left(\mathrm{H} \begin{matrix} p \\ p \end{matrix} \right) \left(\mathrm{H} \begin{matrix} q \\ q \end{matrix} \right) - \left(\mathrm{H} \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right)^2}{L^2 \mathrm{H} f^2(\beta)}.$$

On peut remplacer dans cette valeur L^2 par le produit $\sin^2(P, Q) \times (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \times (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$, ou simplement par $\sin^2(P, Q)$ si les plans sont donnés par des équations de la forme

$$x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\beta + x_3 \cos\gamma - \delta x_4 = 0.$$

Si les axes sont obliques, on a la même valeur de I_{pq}, pourvu qu'on remplace L^2 par

$$\Sigma(p_1 q_2)^2 + 2\Sigma(p_1 q_2)(p_2 q_3) \cos x_3 x_1.$$

En coordonnées tétraédriques, on a encore une formule pareille.

6. Considérons un triangle $M_1M_2M_3$ conjugué avec une conique S; soient μ_r, μ_{rs} les indices du point M_r et de la droite M_rM_s par rapport à S, M_4 le point central de M_2M_3, 2α et 2β les diamètres suivant les directions M_2M_3 et M_1M_4, $2A$ et $2B$ les axes principaux de S. L'indice d'un diamètre étant évidemment l'inverse du carré de sa demi-longueur, nous avons

$$-\mu_{23} = \frac{\mu_2\mu_3}{\overline{M_2M_3}^2} = \frac{\mu_4}{\alpha^2},$$

$$-\mu_{14} = \frac{\mu_1\mu_4}{\overline{M_1M_4}^2} = -\frac{1}{\beta^2}.$$

Multiplions membre à membre ces relations; il vient

$$\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\overline{M_2M_3}^2 . \overline{M_1M_4}^2} = -\frac{1}{\alpha^2\beta^2}.$$

Mais $\alpha\beta \sin(\alpha, \beta) = AB$, $M_2M_3 \times M_1M_4 \sin(\alpha, \beta) = 2T$, T étant la surface du triangle; par suite

$$(7) \qquad A^2B^2 - = \frac{4T^2}{\mu_1\mu_2\mu_3}.$$

En remplaçant μ_1, μ_2, μ_3 par les rapports, pris en signe contraire, des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle et du centre O sur les côtés, on peut déduire de l'égalité (7) le théorème Faure de la question 560, t. XX, p. 55.

Soient maintenant un triangle $M_1 M_2 M_3$ conjugué avec une surface du second ordre f, M_4 le pôle du plan $M_1 M_2 M_3$, M_5 le centre de la section S de f par ce plan, I_r l'indice de M_r par rapport à f, μ_r celui relatif à S, $2D$ et $2D'$ les axes de S, $2A$ et $2B$ ceux de la section centrale parallèle à S. On a, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$D^2 D'^2 = -\frac{4T^2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3}.$$

Mais $I_r = -\mu_r I_5$; car, en menant la sécante $M_r NN'$ parallèle à D, on a

$$I_r = \frac{M_r N . M_r N'}{A^2} = \frac{M_r N . M_r N'}{D^2} \frac{D^2}{A^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{I_1 I_2 I_3}{4T^2} = \frac{I_5^3}{D^2 D'^2},$$

ou, à cause de $I_5 = -\frac{D^2}{A^2} = -\frac{D'^2}{B^2}$,

$$\frac{I_1 I_2 I_3}{4T^2} = \frac{I_5}{A^2 B^2}.$$

Soient p, p' les perpendiculaires abaissées de O et de M_4 sur le plan $M_1 M_2 M_3$, $2C$ la longueur du diamètre $OM_4 M_5$, $2a$, $2b$ et $2c$ les axes principaux de f; on aura

$$I_5 = \frac{M_5 M_4 . M_5 O}{C^2} = \frac{p' p}{C^2 \sin^2(C, AB)},$$

$$ABC \sin(C, AB) = abc;$$

d'où

$$(8) \qquad pp' = \frac{I_1 I_2 I_3}{4T^2} \times a^2 b^2 c^2.$$

Appelons *indice d'un plan* le produit $(-p'p)$ des distances du pôle du plan et du centre de la surface à ce plan. Comme tous les triangles conjugués avec une conique S sont dits former une *involution plane* (*) dont le point central est le centre de S, nous avons les propriétés suivantes de l'involution plane analogues à celles de l'involution rectiligne du n° 4 :

1° *Le produit des indices des sommets d'un triangle quelconque d'une involution plane, divisé par le carré de la surface de ce triangle, est constant et proportionnel à l'indice du plan;*

2° *La somme des inverses des indices des sommets d'un triangle quelconque d'une involution plane est constante et égale à l'inverse de l'indice du point central.*

V étant le volume du tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$, on peut remplacer, dans l'égalité (8), T^2 par $\frac{9V^2}{p'^2}$, et ensuite $\frac{p'}{p}$ par $-I_4$; il vient ainsi

$$a^2 b^2 c^2 = -\frac{36 V^2}{I_1 I_2 I_3 I_4},$$

ou, V_1, V_2,... ayant la même signification qu'au n° 3,

$$a^2 b^2 c^2 = -\frac{36 V_1 V_2 V_3 V_4}{V^2},$$

égalités qui fournissent le théorème Faure de la question 918, et le théorème Painvin, t. XIX, p. 294.

Voici encore une autre démonstration élégante de ces égalités, tirée directement des formules du n° 4. Soient M_6 et M_7 les points centraux des arêtes opposées $M_1 M_2$ et $M_3 M_4$, D_{12}, D_{34}, D_{67} les demi-diamètres suivant les

(*) *Voir*, pour l'involution plane, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e serie, t. IV, p. 493 et 496.

directions conjuguées M_1M_2, M_3M_4, OM_6M_7; nous avons

$$-I_{12} = \frac{I_1 I_2}{\overline{M_1M_2}^2} = \frac{I_6}{D_{12}^2},$$

$$-I_{34} = \frac{I_3 I_4}{\overline{M_3M_4}^2} = \frac{I_7}{D_{34}^2},$$

$$-I_{67} = \frac{I_6 I_7}{\overline{M_6M_7}^2} = -\frac{1}{D_{67}^2};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{\overline{M_1M_2}^2 \times \overline{M_3M_4}^2 . \overline{M_6M_7}^2} = -\frac{1}{D_{12}^2 D_{34}^2 D_{67}^2}.$$

Multiplions les deux dénominateurs par

$$\sin^2(\widehat{D_{12}, D_{34}}) \sin^2(\widehat{D_{67}, D_{12} D_{34}});$$

alors le second dénominateur sera le volume du parallélépipède construit sur D_{12}, D_{34} et D_{67}, ou égal à abc; $M_6M_7 \sin(D_{67}, D_{12}D_{34})$ sera la plus courte distance δ de M_1M_2 et M_3M_4, et $\frac{1}{6} M_1M_2 \times M_3M_4 \times \delta \sin(M_1M_2, M_3M_4)$ le volume du tétraèdre (*); donc, etc.

(*La suite prochainement.*)