Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 281-286

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__281_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 466

(voir 1re série, t. XVIII, p. 117);

PAR M. H. BROCARD.

Par un point fixe A pris sur l'intersection de deux plans fixes, on mène dans un de ces plans une droite variable, et dans le second plan, par le même point A, une droite perpendiculaire à la première droite; puis, toujours par le même point A, une troisième droite per-

pendiculaire aux deux premières. Démontrer que l'enveloppe du plan des deux premières droites est un cône du second degré, et de même la surface décrite par la troisième droite. (MAC CULLAGH.)

Application à la sphère du centre A. (CAYLEY.)

Prenons pour origine le point fixe A, pour axe des z la droite d'intersection des deux plans fixes, pour plans des xy et des yz les plans bissecteurs du dièdre fixe, pour plan des xy un plan perpendiculaire à Az, mené par A.

Soit

$$(1) \qquad ax + by + z = 0$$

l'équation d'un plan passant par l'origine. Il doit couper les deux plans fixes donnés

$$(2) \qquad y = mx, \quad y = -mx$$

suivant deux droites rectangulaires. On trouve ainsi la condition

$$(3) \qquad 1 - m^2 + a^2 - b^2 m^2 = 0.$$

L'équation de l'enveloppe du plan (1) sous la condition (3) s'obtient facilement, et se décompose en deux

$$(4) \qquad m^2 x^2 - y^2 = 0,$$

$$(5) \qquad (1 - m^2)(m^2 x^2 - y^2) + m^2 z^2 = 0.$$

La première représente les deux plans fixes donnés.

La seconde est l'équation d'un cône du second degré.

La normale au plan (1) menée par l'origine a pour équations

$$(6) \qquad x = az, \quad y = bz,$$

avec la condition (3). Le lieu de cette droite s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (6) et (3). On arrive ainsi à l'équation d'un cône du second degré

$$(7) \qquad (1 - m^2) z^2 + x^2 - m^2 y^2 = 0.$$

On passe facilement au cas où le point A est le centre d'une sphère fixe, et l'on arrive à la proposition suivante :

Étant donnés deux grands cercles C, C′ *fixes sur une sphère dont le centre est en un point fixe* A, *que l'on considère un point* P *sur le cercle* C, *et un point* P′ *sur le cercle* C′, *tels, que* PAP′ *soit un angle droit, l'enveloppe de l'arc de grand cercle* PP′ *sera l'intersection de la sphère avec un cône du second degré ayant son sommet en* A. *Le lieu du pôle de ce grand cercle* PP′ *sera une courbe sphérique définie d'une manière analogue.*

Question 785

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 480);

PAR M. KAHER-BEY,

au Caire.

Mener à deux cercles donnés deux tangentes qui fassent un angle donné, et de façon que la ligne qui joint les points de contact passe par un point donné.

Prenons pour origine le point donné, pour axe des abscisses une parallèle à la ligne des centres, et pour axe des ordonnées une perpendiculaire.

Les équations des deux cercles donnés étant

$$(x - d)^2 + (y - h)^2 = R^2,$$
$$(x - d')^2 + (y - h)^2 = R'^2,$$

les équations des tangentes pourront s'écrire

$$(x - d) \cos\theta + (y - h) \sin\theta = \pm R,$$
$$(x - d') \cos\theta' + (y - h) \sin\theta' = \pm R'.$$

Dans ces équations θ et θ' sont les angles formés par les rayons qui aboutissent aux points de contact, et comme ces rayons sont perpendiculaires sur les tangentes, qui font entre elles un angle donné α, on aura nécessairement

$$\theta' = \theta + \alpha.$$

Les coordonnées des points de contact sont évidemment, en concevant, pour simplifier l'écriture, que R et R' peuvent avoir les deux signes,

$$x_1 = d + \mathrm{R}\cos\theta,\quad y_1 = h + \mathrm{R}\sin\theta,$$
$$x_2 = d' + \mathrm{R}'\cos\theta',\quad y_2 = h + \mathrm{R}'\sin\theta'.$$

La droite qui joint les points de contact devant passer par l'origine, on en conclut

$$\frac{h + \mathrm{R}\sin\theta}{d + \mathrm{R}\cos\theta} = \frac{h + \mathrm{R}'\sin\theta'}{d' + \mathrm{R}'\cos\theta'},$$

soit, en chassant les dénominateurs et ramenant tous les termes dans le premier membre,

$$hd' - hd + h\mathrm{R}'\cos\theta' - h\mathrm{R}\cos\theta + \mathrm{R}d'\sin\theta$$
$$- \mathrm{R}'d\sin\theta' + \mathrm{RR}'(\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta) = 0.$$

Mais $\theta' = \theta + \alpha$. On a donc

$$hd' - hd + h\mathrm{R}'(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) - h\mathrm{R}\cos\theta$$
$$+ \mathrm{R}d'(\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta) - \mathrm{R}'d\sin\theta' - \mathrm{RR}'\sin\alpha = 0,$$

$$(\mathrm{R}d'\cos\alpha - \mathrm{R}'d - h\mathrm{R}'\sin\alpha)\sin\theta$$
$$+ (\mathrm{R}d'\sin\alpha + h\mathrm{R}'\cos\alpha - h\mathrm{R})\cos\theta + hd' - hd - \mathrm{RR}'\sin\alpha = 0.$$

C'est une équation très-simple de la forme

$$\mathrm{M}\sin\theta + \mathrm{N}\cos\theta = \mathrm{P}.$$

On sait, par les éléments de Trigonométrie rectiligne, que si l'on suppose

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}},$$

la solution est donné par la relation

$$\sin(\theta + \varphi) = \frac{P \cos \varphi}{M}.$$

Comme les quantités R et R′ peuvent être prises chacune, soit positivement, soit négativement, on peut avoir quatre systèmes de solutions. Les conditions de réalité de ces solutions sont

$$-1 \leq \frac{P \cos \varphi}{M} \leq 1.$$

Note. — La même question a été résolue aussi par M. René Douay, élève du lycée de Besançon.

Question 786

(voir 2e série, t. V, p. 480);

Par M. J. FRETZ,

Élève de l'École Polytechnique de Zurich.

Placer sur trois circonférences données un triangle donné, semblable à celui qu'on obtient en joignant deux à deux les trois centres. (J. Petersen.)

Soient C, C′, C″ les centres, r, r', r'' les rayons des trois circonférences ; on construit un point x tel, que l'on ait

$$\frac{Cx}{r} = \frac{C'x}{r'} = \frac{C''x}{r''}.$$

Ce point se déterminant par l'intersection de deux cercles indépendants l'un de l'autre, il faut distinguer trois cas : 1° les deux cercles ne se coupent pas : cas d'impossibilité ; 2° l'un des deux cercles est tangent à l'autre : le point de contact est le point x ; 3° les deux cercles se coupent : il y a deux points x et x', qui satisfont aux conditions précédentes.

Cela posé, on joint x aux trois centres C, C′, C″, et l'on prend sur Cx et $C'x$ deux points c, c', de telle sorte que la droite cc' soit à la fois parallèle à CC' et égale au côté du triangle donné, qui est l'homologue de CC'. En menant cc'' parallèle à CC'' et en joignant c' à c'', on obtient le triangle $cc'c''$, égal au triangle donné et semblable au triangle $CC'C''$.

Enfin de x comme centre, avec xc, xc', xc'' pour rayons, on décrit des arcs qui coupent les circonférences C, C', C'' respectivement aux points f et g, f' et g', f'' et g''. Les triangles $ff'f''$ et $gg'g''$ sont égaux au triangle $cc'c''$, et, par suite, au triangle donné. La question est donc résolue.

Il peut se faire que c, c', c'' soient hors des cercles C, C', C'' : cela arrive simultanément pour les trois points, et alors il y a impossibilité.

Comme il existe deux points x pouvant fournir chacun deux triangles, le nombre des solutions peut s'élever jusqu'à quatre.