NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. PAINVIN

Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 49-69

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__49_0>

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(suite, voir 2e série, t VII, p. 187);

PAR M. L. PAINVIN.

§ V. — *L'équation en λ a trois racines égales.*

21. Lorsque l'équation en λ a trois racines égales, trois cas peuvent se présenter :

PREMIER CAS. — *Le cône correspondant à la racine triple est un cône proprement dit.*

Les deux surfaces se touchent alors en un point; la courbe d'intersection est une courbe gauche du quatrième ordre ayant un point double de rebroussement au point de contact; la réciproque est vraie.

Le cône correspondant à la racine triple a son sommet au point de contact A *des deux surfaces, et touche suivant une droite* AB *le plan tangent commun; la droite* AB *est la tangente de rebroussement de la courbe gauche.*

Le cône correspondant à la racine simple a son sommet C *sur le plan tangent commun, et il touche aussi ce plan suivant une droite* CA *passant par le point* A.

Les sommets des deux cônes sont les seuls points qui aient même plan polaire par rapport aux deux surfaces; le sommet A *a pour plan polaire le plan tangent commun* BAC; *le sommet* C *a pour plan polaire un plan* BAD *passant par la droite* AB, *et qui est en même* *temps le plan polaire de la droite* AC *par rapport au cône* (A).

Un plan quelconque passant par la tangente AB *de rebroussement coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices; le contact est du second ordre.*

Les pôles d'un plan quelconque passant par AB *sont distincts par rapport à chacune des surfaces, et se meuvent sur la droite* AC, *et inversement.*

Deuxième cas. — *Le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans distincts.*

Les deux surfaces se coupent alors suivant deux courbes planes, et ces deux courbes planes se touchent; les deux surfaces se touchent en un point unique, qui est le point de contact des courbes planes; la réciproque est vraie.

Tous les points de l'intersection AB *des plans* ABC *et* ABD *des deux courbes planes ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; tous ces plans tournent autour d'une droite fixe* AS, *située dans le plan tangent commun aux deux surfaces;* A *est le point de contact.*

Le sommet S *du cône correspondant à la racine simple se trouve sur la droite* AS; *ce sommet* S *a même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ce plan passe par la droite* AB, *et forme avec le plan tangent commun un système harmonique par rapport aux plans des deux courbes communes.*

Les pôles d'un plan tournant autour de AB *sont distincts par rapport à chacune des surfaces, et se meuvent sur* AS, *et inversement.*

Un plan quelconque passant par la droite AB, *intersection des plans des deux courbes communes, coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices; le contact est du troisième ordre.*

TROISIÈME CAS. — *Le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans coïncidents.*

Lorsque l'équation en λ a une racine triple, et que le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans coïncidents, les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre ; la courbe de contact est une courbe plane.

Le cône correspondant à la racine simple est circonscrit à chacune des surfaces suivant cette même courbe.

Réciproquement : *Si deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre suivant une conique proprement dite, l'équation en λ a une racine triple, et le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans coïncidents.*

Les points qui ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces sont : d'une part, tous les points du plan de la courbe de contact ; d'autre part, le sommet du cône correspondant à la racine simple.

Les plans polaires des premiers points passent par le sommet du cône ; le plan polaire du sommet de ce cône est le plan de la courbe de contact.

I. *Le cône correspondant à la racine triple est un cône proprement dit.*

22. Je prendrai pour sommet A du tétraèdre de référence, le sommet du cône correspondant à la racine triple ; comme le cône en question est un cône proprement dit, il résulte d'abord de l'analyse du n° **16** [relations (1°) et (2°)], que les équations des deux surfaces se présentent sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} (\mathrm{S})\quad A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ \qquad\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ (\mathrm{T})\quad B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + B_{44}t^2 - 2\dfrac{A_{12}}{\lambda_0}xy - 2\dfrac{A_{13}}{\lambda_0}xz \\ \qquad\qquad - 2\dfrac{A_{14}}{\lambda_0}xt + 2B_{23}yz + 2B_{24}yt + 2B_{34}zt = 0. \end{cases}$$

Les deux surfaces passent par le sommet A, et elles ont en ce point même plan tangent; l'équation de ce plan est

$$A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t = 0;$$

prenons ce plan pour face ABC du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0,$$

et les équations des deux surfaces pourront s'écrire :

$$(2) \quad \begin{cases} (\mathrm{S}) & A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2xt \\ & \quad + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ (\mathrm{T}) & B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2xt \\ & \quad + 2B_{23}yz + 2B_{24}yt + 2B_{34}zt = 0, \end{cases}$$

car le coefficient de xt ne peut être nul, autrement on aurait deux cônes ayant même sommet, et l'équation en λ se réduirait à une identité.

Dans le cas des équations (2), l'équation en λ est

$$(3) \quad (\lambda + 1)^2[(B_{22} + \lambda A_{22})(B_{33} + \lambda A_{33}) - (B_{23} + \lambda A_{23})^2] = 0;$$

et le cône correspondant à la racine $\lambda = -1$ aura pour équation

$$(4) \quad \begin{cases} (A_{22} - B_{22})y^2 + (A_{33} - B_{33})z^2 + (A_{44} - B_{44})t^2 \\ \quad + 2(A_{23} - B_{23})yz + 2(A_{24} - B_{24})yt + 2(A_{34} - B_{34})zt = 0. \end{cases}$$

Écrivons maintenant que l'équation (3) a trois racines égales à -1, il vient

$$(5) \quad (A_{22} - B_{22})(A_{33} - B_{33}) - (A_{23} - B_{23})^2 = 0.$$

Or l'équation de condition (5) exprime que le cône (4) touche le plan ABC ou $t = 0$; l'arête de contact est

$$(6) \quad t = 0, \quad (A_{22} - B_{22})y + (A_{23} - B_{23})z = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6\ bis)\qquad t = 0, \quad (A_{23} - B_{23})y + (A_{33} - B_{33})z = 0.$$

La génératrice de contact passe par le sommet A; prenons-la pour arête AB du tétraèdre de référence, nous devrons faire

$$A_{22} - B_{22} = 0, \quad \text{d'où} \quad A_{23} - B_{23} = 0.$$

Les équations (2) des deux surfaces deviennent alors

$$(7)\quad \begin{cases} (S)\quad A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{23}yz \\ \qquad\qquad + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt + 2xt = 0, \\ (T)\quad A_{22}y^2 + B_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2A_{23}yz \\ \qquad\qquad + 2B_{24}yt + 2B_{34}zt + 2xt = 0; \end{cases}$$

l'équation en λ est

$$(8)\qquad (\lambda + 1)^3[A_{22}(B_{33} + \lambda A_{33}) - A_{23}^2(\lambda + 1)] = 0;$$

et le cône correspondant à la racine triple aura pour équation

$$(9)\quad \begin{cases} (A_{33} - B_{33})z^2 + (A_{44} - B_{44})t^2 \\ \quad + 2(A_{24} - B_{24})yt + 2(A_{34} - B_{34})zt = 0. \end{cases}$$

Si λ_1 est la racine simple, l'équation du cône correspondant sera

$$\begin{aligned} A_{22}(\lambda_1 + 1)y^2 &+ (B_{33} + \lambda_1 A_{33})z^2 + (B_{44} + \lambda_1 A_{44})t^2 \\ &+ 2A_{23}(\lambda_1 + 1)yz + 2(B_{24} + \lambda_1 A_{24})yt \\ &\qquad + 2(B_{34} + \lambda_1 A_{34})zt + 2(\lambda_1 + 1)xt = 0; \end{aligned}$$

et, en remarquant que, d'après l'équation (8),

$$\frac{B_{33} + \lambda_1 A_{33}}{\lambda_1 + 1} = \frac{A_{23}^2}{A_{22}},$$

cette dernière équation peut s'écrire

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{22}y^2 + \frac{A_{23}^2}{A_{22}} z^2 + 2A_{23}yz + 2xt + \frac{B_{44} + \lambda_1 A_{44}}{\lambda_1 + 1} t^2 \\ &\qquad + 2\frac{B_{24} + \lambda_1 A_{24}}{\lambda_1 + 1} yt + 2\frac{B_{34} + \lambda_1 A_{34}}{\lambda_1 + 1} zt = 0. \end{aligned}\right.$$

On ne peut pas supposer $B_{33} - A_{33} = 0$, car autrement l'équation en λ (8) admettrait quatre racines égales.

Remarquons maintenant que le sommet du cône (10) est dans le plan ABC ou $t = 0$; car si l'on fait $t = 0$ dans cette équation, on trouve

$$(A_{22}y + A_{23}z)^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le cône correspondant à la racine simple touche le plan tangent commun aux deux surfaces; la génératrice de contact passe par le sommet A, et ne peut pas se confondre avec la droite AB, car il faudrait pour cela que l'on eût $A_{22} = 0$, et l'équation (8) admettrait alors quatre racines égales.

Nous pouvons donc prendre cette génératrice de contact pour arête AC du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$(11)\qquad A_{23} = 0,$$

et prendre, en même temps, pour sommet C, le sommet du cône (10), c'est-à-dire écrire que l'équation (10) ne renferme pas de termes en z, ce qui donne, outre la relation (11),

$$B_{34} + \lambda_1 A_{34} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = -\frac{B_{34}}{A_{34}}.$$

Cette valeur de λ_1 doit annuler le second facteur de l'équation (8), on aura donc

$$(12)\qquad B_{33}A_{34} - B_{34}A_{33} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{B_{33}}{A_{33}} = \frac{B_{34}}{A_{34}} = -\lambda_1.$$

La droite AC n'appartient pas au cône (9), car il faudrait pour cela que l'on eût $B_{33} = A_{33}$, ce qui ne peut avoir lieu comme on l'a vu; il résulte de là que, par la droite AC, on peut mener deux plans tangents au cône (9); l'un d'eux sera le plan CAB qui le touche suivant AB; prenons le second plan tangent pour face CAD du tétraèdre de référence. D'après cela, en faisant $y = 0$ dans l'équation (9), on devra trouver un carré parfait; par suite

$$(13) \qquad (B_{33} - A_{33})(B_{44} - A_{44}) = (B_{34} - A_{34})^2;$$

et le plan des génératrices de contact sera

$$(14) \qquad (B_{33} - A_{33})z + (B_{34} - A_{34})t = 0.$$

Le plan (14) passe par la droite AB, on peut le prendre pour face BAD, c'est-à-dire supposer

$$(15) \qquad B_{34} - A_{34} = 0, \quad \text{d'où} \quad B_{44} - A_{44} = 0.$$

Si l'on compare ces relations à l'égalité (12), et si l'on remarque que λ_1 est différent de -1, on conclut de là

$$(16) \qquad A_{34} = 0, \quad B_{34} = 0.$$

Eu égard aux relations (11), (15) et (16), les équations (7) des deux surfaces deviennent

$$(17) \quad \begin{cases} (S) & A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{24}yt + 2xt = 0, \\ (T) & A_{22}y^2 - \lambda_1 A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2B_{24}yt + 2xt = 0; \end{cases}$$

et le cône correspondant à la racine simple aura pour équation

$$(18) \qquad A_{22}y^2 + A_{44}t^2 + 2xt + 2\frac{B_{24} + \lambda_1 A_{24}}{\lambda_1 + 1}yt = 0.$$

Les trois arêtes AB, AC, AD du tétraèdre de référence sont maintenant déterminées, le sommet C est également choisi; il ne reste plus d'arbitraires que les sommets B et D sur les arêtes respectives AB et AD.

L'équation (18) représente aussi la trace du cône correspondant à la racine simple sur le plan BAD, cette conique touche la droite AB au point A; la droite AD rencontre la conique en un second point défini par les équations

$$y = 0, \quad A_{44}\,t + 2x = 0;$$

nous prendrons ce point pour sommet D, c'est-à-dire que nous supposerons

$$A_{44} = 0.$$

Enfin nous choisirons pour sommet B le point où la tangente en D vient rencontrer la droite AB; pour cela, il faut exprimer que la polaire du point B ($x_0 = 0$, $t_0 = 0$), c'est-à-dire

$$A_{22}\,y + \frac{B_{24} + \lambda_1 A_{24}}{\lambda_1 + 1}\,t = 0,$$

se confond avec AD ou $y = 0$; on a ainsi

$$B_{24} + \lambda_1 A_{24} = 0.$$

Les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(19)\quad \begin{cases} (S) & A_{22}\,y^2 + A_{33}\,z^2 + 2A_{24}\,yt + 2xt = 0, \\ (T) & A_{22}\,y^2 - \lambda_1 A_{33}\,z^2 - 2\lambda_1 A_{24}\,yt + 2xt = 0. \end{cases}$$

On voit ainsi que :

« Si l'équation en λ a trois racines égales, et que le
» cône correspondant à la racine triple soit un cône pro-
» prement dit, les deux surfaces se touchent en un point
» unique A; le cône correspondant à la racine triple a
» son sommet au point de contact A, et touche le plan
» tangent commun; le cône correspondant à la racine
» simple a son sommet dans le plan tangent commun, et

» le touche ainsi suivant une droite qui passe par le
» point A. »

Par la discussion qui précède, on voit que si l'on prend : pour sommet A du tétraèdre de référence, le sommet du cône correspondant à la racine triple, c'est-à-dire le point de contact des deux surfaces; pour face BAC, le plan tangent commun; pour arête AB, la génératrice de contact du cône (A) avec le plan BAC; pour sommet C, celui du cône correspondant à la racine simple; pour face CAD, le second plan tangent mené par CA au cône (A); pour face BAD, le plan des arêtes de contact; pour sommet D, le point où la droite AD vient rencontrer la trace du cône (C) sur le plan BAD; et enfin, pour sommet B, le point où la tangente en D vient rencontrer la droite AB, *les équations des deux surfaces pourront se ramener à la forme définitive*

$$(20)\quad \begin{cases} (S) & ay^2 + 2xt + bz^2 + 2cyt = 0, \\ (T) & k(ay^2 + 2xt) + bz^2 + 2cyt = 0. \end{cases}$$

L'équation du cône correspondant à la racine triple est alors

$$(21)\qquad (A)\quad bz^2 + 2cyt = 0;$$

celle du cône correspondant à la racine simple est

$$(22)\qquad (C)\quad ay^2 + 2xt = 0;$$

quant à l'équation en λ, elle est, dans le cas actuel,

$$(23)\qquad (\lambda + k)^3(\lambda + 1) = 0.$$

23. A l'aide des équations (20), l'étude des propriétés communes aux deux surfaces devient extrêmement facile.

Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) par rapport aux surfaces (20) sont

$$(24)\quad \begin{cases} x_0 t + y_0(ay + ct) + bz_0 z + t_0(x + cy) = 0, \\ kx_0 t + y_0(kay + ct) + bz_0 z + t_0(kx + cy) = 0. \end{cases}$$

On constate alors que :

« Les sommets A et C des deux cônes sont les seuls
» points qui ont même plan polaire par rapport aux deux
» surfaces; le sommet A a pour plan polaire le plan tan-
» gent commun BAC; le sommet C a pour plan polaire
» le plan BAD, lequel est le plan polaire de AC par rap-
» port au cône (A). »

Les coordonnées du pôle d'un plan

$$Mx + Ny + Pz + Qt = 0$$

sont données par les équations

$$\frac{t_0}{M} = \frac{ay_0 + ct_0}{N} = \frac{bz_0}{P} = \frac{x_0 + cy_0}{Q}, \quad \text{pour la } 1^{re} \text{ surface,}$$

$$\frac{kt_0}{M} = \frac{kay_0 + ct_0}{N} = \frac{bz_0}{P} = \frac{kx_0 + cy_0}{Q}, \quad \text{pour la } 2^{e} \text{ surface.}$$

On déduira de là que :

« Les pôles d'un plan quelconque passant par AB sont
» distincts par rapport à chacune des surfaces, et se meu-
» vent sur la droite AC, et inversement. »

24. Nous allons enfin démontrer que :

« Les deux surfaces (20) se coupent suivant une courbe
» du quatrième ordre ayant un point double au point A
» où les deux surfaces se touchent; ce point double est
» un point de rebroussement; la tangente de rebrous-
» sement est l'arête de contact du plan tangent com-
» mun ABC avec le cône (A) correspondant à la racine
» triple. Un plan quelconque passant par la tangente
» de rebroussement AB coupe les deux surfaces suivant
» deux coniques osculatrices; le contact est du second or-
» dre. »

En effet, un plan quelconque passant par le point A coupe les deux surfaces (20) suivant deux courbes qui se touchent en A ; le point A est donc un point double de la courbe d'intersection. Les tangentes sont données par les intersections du cône (A) (21) avec le plan tangent commun $t = 0$; ces deux tangentes coïncident avec AB : la démonstration se fera comme au n° 18.

Un plan quelconque passant par AB,

$$z = \alpha t,$$

coupe les surfaces (20) suivant des courbes respectivement situées sur les deux cônes

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} ay^2 + 2xt + \alpha^2 bt^2 + 2cyt = 0, \\ \lambda(ay^2 + 2xt) + \alpha^2 bt^2 + 2cyt = 0. \end{array} \right.$$

Assimilant ces équations à celles de deux coniques, on voit que l'équation en μ correspondant aux sécantes communes est

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda + \mu \\ 0 & a(\lambda + \mu) & c(1 + \mu) \\ \lambda + \mu & c(1 + \mu) & \alpha^2 b(1 + \mu) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad (\lambda + \mu)^3 = 0;$$

cette équation a une racine triple, et comme le système des sécantes communes correspondant à cette racine triple se compose de deux droites distinctes, il en résulte que les deux coniques sont osculatrices, et que le contact est du second ordre ; il en est donc de même des cônes (25), ce qui démontre la proposition énoncée.

Réciproquement : « Lorsque deux surfaces du second
» ordre se touchent en un point, et que la courbe d'in-
» tersection a un point de rebroussement en ce point de
» contact, l'équation en λ a trois racines égales, et le
» cône correspondant à la racine triple est un cône pro-
» prement dit. »

On démontrera facilement cette réciproque, en prenant le plan tangent commun pour plan des xy, par exemple le point de contact pour origine, et la tangente de rebroussement pour axe des x.

II. *Le cône correspondant à la racine triple se compose de deux plans distincts.*

25. Je choisirai ces deux plans comme faces ABC et ABD du tétraèdre de référence ; d'après l'analyse faite au commencement du n° 19, on en conclura que les équations des deux surfaces sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2B_{34}zt = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'équation en λ sera

$$(2)\quad (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}(\lambda+1) & A_{41}(\lambda+1) \\ A_{12} & A_{22} & A_{32}(\lambda+1) & A_{42}(\lambda+1) \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}(\lambda+1) & B_{43}+\lambda A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & B_{34}+\lambda A_{34} & A_{44}(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut exprimer que la racine -1 est triple, c'est-à-dire que le second facteur du produit (2) s'annule pour $\lambda = -1$; on trouve ainsi

$$(B_{34} - A_{34})^2 (A_{11}A_{22} - A_{12}^2) = 0;$$

on ne peut pas supposer $A_{34} = B_{34}$, car alors les deux surfaces (1) coïncideraient ; il reste donc

$$(3)\qquad A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0.$$

Mais si nous cherchons l'intersection de la droite AB ($z = 0$, $t = 0$) avec les deux surfaces (1), nous avons

$$(4)\qquad A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = 0;$$

la relation (3) exprime que les points déterminés par l'équation (4) sont confondus. Prenons ce point pour sommet A du tétraèdre de référence, ce qui revient à supposer

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0;$$

les équations des deux surfaces seront maintenant

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt \\ &\qquad + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ &A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt \\ &\qquad + 2A_{24}yz + 2A_{24}yt + 2B_{34}zt = 0. \end{aligned} \right.$$

Le plan tangent en A a pour équation $f'_x = 0$, c'est-à-dire

$$(6) \qquad A_{13}z + A_{14}t = 0;$$

ce plan touche donc à la fois les deux surfaces, et il passe par la droite AB, intersection des plans correspondant à la racine triple.

L'équation du plan polaire d'un point quelconque situé sur la droite AB (x_0, y_0, $z_0 = 0$, $t_0 = 0$) est

$$(7) \qquad x_0(A_{13}z + A_{14}t) + y_0(A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t) = 0.$$

On voit par là que

« Le plan polaire d'un point quelconque situé sur la
» droite AB est le même pour les deux surfaces; ces
» plans polaires passent par une droite fixe AS, qui est
» l'intersection des deux plans

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &A_{13}z + A_{14}t = 0, \\ &A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t = 0. \text{ »} \end{aligned} \right.$$

Le premier de ces plans est le plan tangent commun aux deux surfaces, et passe par la droite AB; le second passe par le point A, mais il ne contient jamais la droite AB; car, s'il passait par cette droite, on pourrait supposer $A_{22} = 0$, et l'équation en λ aura quatre racines égales.

Le second des plans (8) est visiblement le plan polaire du point B, nous le prendrons pour la face CAD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que nous supposerons

$$A_{23} = 0, \quad A_{24} = 0.$$

Les équations des deux surfaces sont alors

$$(9)\begin{cases} A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{34}zt = 0, \\ A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2B_{34}zt = 0, \end{cases}$$

et l'équation en λ se réduit à

$$(10) \qquad (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 0 & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33}(\lambda+1) & B_{34}+\lambda A_{34} \\ A_{41} & B_{43}+\lambda A_{43} & A_{44}(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0;$$

on ne pourra supposer nuls ni A_{13}, ni A_{14}, car autrement l'équation en λ admettrait quatre racines égales.

La droite AC ($y = 0$, $t = 0$) rencontre les deux surfaces (9) en deux points déterminés par l'équation

$$A_{33}z^2 + 2A_{13}xz = 0;$$

ces deux points, dont l'un est le point A, sont nécessairement distincts; nous prendrons le second comme sommet C, c'est-à-dire que nous supposerons

$$A_{33} = 0.$$

La droite AD ($y = 0$, $z = 0$) rencontre les deux surfaces aux deux points définis par l'équation

$$A_{44}t^2 + 2A_{14}xt = 0;$$

nous prendrons le point distinct de A pour sommet D, c'est-à-dire que nous ferons

$$A_{44} = 0.$$

Les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(11)\quad \begin{cases} A_{22}y^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{34}zt = 0, \\ A_{22}y^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2B_{34}zt = 0; \end{cases}$$

l'équation en λ est

$$(12)\qquad (\lambda + 1)^3(B_{34} + \lambda A_{34}) = 0,$$

et l'équation du cône correspondant à la racine simple est

$$(13)\qquad A_{22}y^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt = 0.$$

Remarquons que les courbes communes aux deux surfaces (11) sont

$$A_{22}y^2 + 2A_{13}xz = 0,$$
$$A_{22}y^2 + 2A_{14}xt = 0;$$

les deux arêtes BC et BD sont tangentes à ces courbes aux points C et D respectivement.

Le point B n'a pas été choisi d'une manière explicite ; si nous prenions, comme sommet B, un autre point sur AB, la face CAD, plan polaire de ce nouveau point, aurait une position différente ; il en serait de même des sommets C et D situés sur les coniques communes aux deux surfaces : les nouvelles arêtes BC et BD seraient encore tangentes à ces coniques.

26. De ce qui précède, il résulte que :

« Lorsque l'équation en λ a trois racines égales, et que
» le cône correspondant à la racine triple se réduit à
» deux plans distincts, les deux surfaces sont tangentes
» en un point unique, et se coupent suivant deux courbes
» planes qui se touchent au point de contact commun. La
» réciproque est vraie, et se démontre sans difficulté. »

Prenant pour faces ABC et ABD du tétraèdre de référence les plans des deux courbes communes; pour sommet A, le point où ces deux courbes se touchent; pour sommet B, un point arbitraire sur l'intersection AB des deux plans ABC et ABD; pour face CAD, le plan polaire de B; pour sommet C et D, les points où ce dernier plan vient rencontrer respectivement les coniques communes : *les équations des deux surfaces se ramèneront à la forme définitive :*

$$(14)\qquad \begin{cases} (\mathrm{S}) & y^2 + 2axz + 2bxt + 2czt = 0, \\ (\mathrm{T}) & y^2 + 2axz + 2bxt + 2c_1zt = 0; \end{cases}$$

l'équation du cône, correspondant à la racine simple, est

$$(15)\qquad y^2 + 2axz + 2bxt = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 + 2x(az + bt) = 0;$$

les coordonnées de son sommet sont définies par les équations

$$(16)\qquad x = 0, \quad y = 0, \quad az + bt = 0.$$

Ces équations mettent immédiatement en évidence les propositions qui suivent :

« Tous les points de l'intersection AB des deux plans
» ABC et ABD ont même plan polaire par rapport aux
» deux surfaces; tous ces plans polaires tournent autour
» d'une droite fixe AS, située dans le plan tangent com-
» mun aux deux surfaces. Le sommet S du cône, corres-
» pondant à la racine simple, se trouve sur cette droite
» AS.

« La droite CD, intersection du plan polaire d'un
» point B (choisi arbitrairement sur AB) avec le plan
» mené par le point B tangentiellemment aux deux cour-
» bes planes, passe constamment par le sommet S. »

Le plan polaire du point S, défini par les équations (16), est

$$(17)\qquad az - bt = 0.$$

Donc :

« Le sommet du cône correspondant à la racine simple, » a même plan polaire par rapport aux deux surfaces ; ce » plan passe par l'intersection des plans des deux coni- » ques communes, et forme, avec le plan tangent com- » mun, un système harmonique par rapport aux plans » des deux coniques. »

On constate aussi que :

« Les pôles d'un plan passant par AB, distincts par » rapport à chacune des surfaces, se meuvent sur la » droite AS qui joint le point de contact des deux sur- » faces au sommet du cône correspondant à la racine » simple ; et inversement.

27. Nous démontrerons enfin cette proposition :

« Un plan quelconque, passant par la droite AB, in- » tersection des plans des deux coniques communes, » coupe les deux surfaces suivant des coniques oscula- » trices ; ces coniques ont un contact du troisième ordre. »

En effet, l'équation d'un plan quelconque passant par AB étant

$$t = \alpha z,$$

les intersections des surfaces (14) par ce plan seront sur les cônes

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} y^2 + 2axz + 2\alpha b\,xz + 2\alpha c z^2 = 0,\\ y^2 + 2axz + 2\alpha b\,xz + 2\alpha c_1 z^2 = 0;\end{array}\right.$$

les équations de ces deux cônes, qui ont le point D pour sommet commun, peuvent être assimilées à celles de deux coniques ; l'équation en μ, correspondant aux systèmes de sécantes communes, est ici

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & (a+\alpha b)(\mu+1)\\ 0 & \mu+1 & 0\\ (a+\alpha b)(\mu+1) & 0 & 2\alpha(c+c_1)\mu \end{array}\right| = 0,$$

ou

$$(\mu + 1)^3 = 0;$$

les trois racines sont donc égales; d'ailleurs le système de sécantes communes, correspondant à cette racine triple, se compose de deux droites coïncidentes; par conséquent les deux cônes sont osculateurs, et le contact est du troisième ordre; d'où la proposition énoncée.

« Un plan quelconque, passant par le point A, et ne
» contenant pas la droite AB, coupe les surfaces suivant
» des coniques simplement tangentes. »

Le fait est facile à constater.

III. *Le cône correspondant à la racine triple se compose de deux plans coïncidents.*

28. Prenons ce plan pour face ABC du tétraèdre de référence; en exprimant que l'équation du cône, correspondant à la racine triple, ne renferme que le terme en t^2, nous trouvons que les équations des deux surfaces sont de la forme

$$(1)\left\{\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ &\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0; \end{aligned}\right.$$

l'équation en λ est

$$(2)\qquad (\lambda + 1)^3 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41}(\lambda + 1) \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42}(\lambda + 1) \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43}(\lambda + 1) \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & B_{44} + \lambda A_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

celle du cône correspondant à la racine simple est

$$(3)\left\{\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + \frac{B_{44} + \lambda_1 A_{44}}{\lambda_1 + 1}t^2 + 2A_{12}xy \\ &\qquad + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, le sommet de ce cône n'est pas dans le plan ABC, car, s'il y était, l'intersection de la surface (3) par le plan ABC ou $t = 0$, savoir :

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz = 0,$$

devrait se réduire à deux droites ; on aurait donc

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

l'équation (2) aurait alors quatre racines égales ; on le voit immédiatement, en développant le déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, et en tenant compte de la relation (4).

Nous pouvons donc prendre le sommet du cône (3) pour sommet D du tétraèdre de référence, c'est-à-dire exprimer que l'équation (3) ne renferme pas de termes en t, on a ainsi

$$B_{44} + \lambda_1 A_{44} = 0, \quad A_{14} = 0, \quad A_{24} = 0, \quad A_{34} = 0.$$

Les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 \\ \quad + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz = 0, \\ A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + B_{44}t^2 \\ \quad + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz = 0. \end{array} \right.$$

Les intersections des deux surfaces par le plan ABC ou $t = 0$ sont

$$(6) \quad A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz = 0;$$

on peut prendre pour sommets A, B, C, ceux d'un triangle conjugué par rapport à la conique (6), c'est-à-dire supposer

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0.$$

En définitive, *les équations des deux surfaces se ramèneront à la forme*

$$(6)\qquad \begin{cases} ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0, \\ ax^2 + by^2 + cz^2 + d_1t^2 = 0; \end{cases}$$

l'équation du cône correspondant à la racine simple sera

$$(7)\qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

« Les deux surfaces ont donc en commun la courbe

$$(8)\qquad t = 0, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0;$$

» et, en chacun des points de cette courbe, les deux sur-
» faces ont même plan tangent, on dit alors que les
» surfaces sont *circonscrites* l'une à l'autre suivant cette
» courbe. »

En effet, les équations des plans tangents à chacune des surfaces en un point (x_0, y_0, z_0, t_0) sont

$$(9)\qquad \begin{cases} ax_0x + by_0y + cz_0z + dt_0t = 0, \\ ax_0x + by_0y + cz_0z + d_1t_0t = 0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + dt_0^2 = 0, \\ ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + d_1t_0^2 = 0; \end{cases}$$

or, ces deux plans coïncideront évidemment si le point choisi appartient à la courbe (8), et ne coïncideront que dans ce cas.

« Le cône correspondant à la racine simple est circon-
» scrit à chacune des surfaces suivant leur courbe de
» contact. »

Car lorsqu'on suppose t_0 nul, le plan (9) devient un plan tangent au cône (7).

On démontrera facilement que :

« Réciproquement : si deux surfaces du second ordre
» sont circonscrites l'une à l'autre suivant une conique

» proprement dite, l'équation en λ admet une racine tri-
» ple, et le cône correspondant à la racine triple se ré-
» duit à deux plans coïncidents. »

29. Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0), par rapport à chacune des surfaces (6), ont pour équations

$$(10) \qquad \begin{cases} ax_0 x + by_0 y + cz_0 z + dt_0 t = 0, \\ ax_0 x + by_0 y + cz_0 z + d_1 t_0 t = 0. \end{cases}$$

D'après cela, il est visible que :

« Les points qui ont même plan polaire par rapport
» aux deux surfaces sont : d'une part, tous les points du
» plan de la courbe de contact, et les plans polaires de
» ces points passent par le sommet du cône correspon-
» dant à la racine simple ; d'autre part, le sommet du cône
« correspondant à la racine simple, le plan polaire de ce
» dernier point est le plan de la courbe de contact.

» Lorsqu'un plan tourne autour du sommet du cône
» correspondant à la racine simple, son pôle est le même
» par rapport aux deux surfaces, et se trouve évidem-
» ment dans le plan de la courbe de contact. »

(*La suite prochainement.*)