NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HOUSEL

Axes des surfaces du second degré obtenus par une sphère concentrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 260-265

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__260_1>

AXES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ OBTENUS PAR UNE SPHÈRE CONCENTRIQUE;

PAR M. HOUSEL.

I. Quoique la surface ait un centre, nous la représenterons d'abord par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

parce que les calculs qui vont suivre s'appliqueront même aux surfaces dépourvues de centre.

L'équation d'un plan tangent à cette surface en un point qui a pour coordonnées x', y', z' sera

$$x(Ax' + B'z' + B''y' + C) + y(A'y' + Bz' + B''x' + C') + z(A''z' + By' + B''x' + C'') + Cx' + C'y' + C''z' + D = 0.$$

Une sphère concentrique à la surface et de rayon R aura pour équation, en indiquant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2(y - y_0)(z - z_0)\cos yz + 2(x - x_0)(z - z_0)\cos xz + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos xy = R^2.$$

Si le point donné est commum à la surface et à la sphère, l'équation du plan tangent à la sphère en ce point, en prenant les dérivées de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, comme si c'étaient les variables elles-mêmes, sera

$$\begin{aligned}&(x-x_0)[x'-x_0+(z'-z_0)\cos xz+(y'-y_0)\cos xy]\\+&(y-y_0)[y'-y_0+(z'-z_0)\cos yz+(x'-x_0)\cos xy]\\+&(z-z_0)[z'-z_0+(y'-y_0)\cos yz+(x'-x_0)\cos yz]=R^2.\end{aligned}$$

II. Si ce plan coïncide avec le plan tangent à la surface en ce même point, il est perpendiculaire au rayon central, qui devient, par conséquent, un *axe principal.*

Pour établir cette coïncidence, il faut chercher à mettre en évidence, dans l'équation du plan tangent à la surface, les facteurs $x-x_0, y-y_0, z-z_0$, au lieu de x, y et z. Cette équation s'écrira donc

$$\begin{aligned}&(x-x_0)(Ax'+B'z'+B''y'+C)\\+&(y-y_0)(A'y'+Bz'+B''x'+C')\\+&(z-z_0)(A''z'+By'+B''x'+C'')\\&\quad+x_0(Ax'+B'z'+B''y'+C)\\&\quad+y_0(A'y'+Bz+B''x'+C')\\&\quad+z_0(A''z'+By'+B''x'+C'')\\&\qquad+Cx'+C'y'+C''z'+D=0.\end{aligned}$$

En mettant de côté les termes affectés des facteurs $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, les termes suivants se combinent de la manière que voici :

$$\begin{aligned}x'(Ax_0+B''y_0+B'z_0+C)+y'(A'y_0+B''x_0+Bz_0+C')&\\+z'(A''z_0+B'x_0+By_0+C'')&=0,\end{aligned}$$

puisque le point (x_0, y_0, z_0) représente le centre.

Il reste donc l'équation

$$\begin{aligned}&(x-x_0)(Ax'+B'z'+B''y'+C)\\+&(y-y_0)(A'y'+Bz'+B''x'+C')\\+&(z-z_0)(A''z'+By'+B''x'+C'')=0.\end{aligned}$$

Pour l'identifier avec celle du plan tangent à la sphère, on posera

$$\frac{Ax' + B'z' + B''y' + C}{-D} = \frac{x' - x_0 + (z' - z_0)\cos xz + (y' - y_0)\cos xy}{R^2},$$

$$\frac{A'y' + Bz' + B''x' + C'}{-D} = \frac{y' - y_0 + (z' - z_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xy}{R^2},$$

$$\frac{A''z' + By' + B'x' + C''}{-D} = \frac{z' - z_0 + (y' - y_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xz}{R^2}.$$

III. Ces équations se modifient si l'on pose aussi, dans les premiers membres,

$$x' = (x' - x_0) + x_0, \quad y' = (y' - y_0) + y_0, \quad z' = (z' - z_0) + z_0.$$

Alors

$$Ax' + B'z' + B''y' + C = A(x' - x_0) + B'(z' - z_0) + B''(y' - y_0),$$

puisque

$$Ax_0 + B'z_0 + B''y_0 + C = 0.$$

Il en est de même pour les autres dérivées.

IV. Cette transformation étant supposée faite, divisons les deux termes de chaque égalité par $z' - z_0$, et indiquons par $\mu = \frac{x' - x_0}{z' - z_0}$, $\nu = \frac{y' - y_0}{z' - z_0}$ les coefficients angulaires du rayon central, les équations précédentes deviennent

$$\frac{A\mu + B' + B''\nu}{-D} = \frac{\mu + \cos xz + \nu\cos xy}{R^2},$$

$$\frac{A'\nu + B + B''\mu}{-D} = \frac{\nu + \cos yz + \mu\cos xy}{R^2},$$

$$\frac{A'' + B\nu + B'\mu}{-D} = \frac{1 + \nu\cos yz + \mu\cos xz}{R^2};$$

d'où l'on tire les équations

$$-\frac{D}{R^2}=\frac{A\mu+B'+B''\nu}{\mu+\cos xz+\cos xy}$$
$$=\frac{A'\nu+B+B''\mu}{\nu+\cos yz+\mu\cos xy}=\frac{A''+B\nu+B'\mu}{1+\nu\cos yz+\mu\cos xz}=s,$$

ce qui donne μ et ν en fonction de s, et aussi l'équation en s.

Ces relations étant connues, il nous suffira de rappeler cette équation en s qui s'en déduit par élimination :

$$\begin{aligned}
&s^3(1-\cos^2 zy-\cos^2 zx-\cos^2 xz+2\cos zy\cos xz\cos xy)\\
&\quad -s^2[A\sin^2 yz+A'\sin^2 xz+A''\sin^2 xy\\
&\qquad\quad -2B''(\cos xy-\cos xz\cos yz)\\
&\qquad\quad -2B'(\cos xz-\cos xy\cos zy)\\
&\qquad\quad -2B(\cos yz-\cos xy\cos xz)]\\
&\quad -s[B''^2-AA'+B'^2-AA''+B^2-A'A''\\
&\qquad\quad +2\cos yz(AB-B'B'')\\
&\qquad\quad +2\cos xz(A'B'-BB'')+2\cos xy(A''B''-BB')]\\
&\qquad\quad +AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''=0.
\end{aligned}$$

V. *Relations entre les axes et les diamètres conjugués.* — Soient s_1, s_2, s_3 les racines de cette équation, et R_1^2, R_2^2, R_3^2 les carrés des demi-axes principaux. Comme ces demi-axes sont les rayons des sphères concentriques dont nous avons parlé, on aura

$$R_1^2=-\frac{D}{s_1},\quad R_2^2=-\frac{D}{s_2},\quad R_3^2=-\frac{D}{s_3}.$$

Considérons, pour fixer les idées, l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

d'un ellipsoïde rapporté à un système de diamètres conjugués. On a alors, dans l'équation de la surface, tous les coefficients nuls, excepté $A = \frac{1}{a'^2}$, $A' = \frac{1}{b'^2}$, $A'' = \frac{1}{c'^2}$ et $D = -1$, d'où $s = \frac{1}{R^2}$. Alors l'équation en s devient, en posant

$$\varepsilon^2 = 1 - \cos^2 yz - \cos^2 xz - \cos^2 xy + 2\cos yz \cos xz \cos xy,$$

$$\frac{\varepsilon^2}{R^6} - \frac{1}{R^4}\left(\frac{\sin^2 yz}{a'^2} + \frac{\sin^2 xz}{b'^2} + \frac{\sin^2 xy}{c'^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{a'^2 b'^2} + \frac{1}{a'^2 c'^2} + \frac{1}{b'^2 c'^2}\right) - \frac{1}{a'^2 b'^2 c'^2} = 0.$$

Multiplions par $R^6 a'^2 b'^2 c'^2$ et changeons les signes, il vient

$$R^6 - R^4(a'^2 + b'^2 + c'^2)$$
$$+ R^2(b'^2 c'^2 \sin^2 yz + a'^2 c'^2 \sin^2 xz + a'^2 b'^2 \sin^2 xy)$$
$$- \varepsilon^2 a'^2 b'^2 c'^2 = 0.$$

On en conclut immédiatement les relations suivantes :

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2, \quad R_1 R_2 R_3 = \varepsilon a' b' c',$$

et

$$R_2^2 R_3^2 + R_1^2 R_3^2 + R_1^2 R_2^2$$
$$= b'^2 c'^2 \sin^2 yz + a'^2 c'^2 \sin^2 xz + a'^2 b'^2 \sin^2 xy.$$

VI. Les équations du § II se mettent sous la forme

$$\frac{Ax' + B'z' + B''y' + C}{x' - x_0 + (z' - z_0)\cos xz + (y' - y_0)\cos xy}$$
$$= \frac{A'y' + Bz' + B''x' + C'}{y' - y_0 + (z' - z_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xy}$$
$$= \frac{A''z' + By' + B'x' + C''}{z' - z_0 + (y' - y_0)\cos yz + (x' - x_0)\cos xz}.$$

Divisant tous les dénominateurs par $z' - z_0$, il reste

$$\frac{\mathrm{A}x' + \mathrm{B}'z' + \mathrm{B}''y' + \mathrm{C}}{\mu + \cos xz + \nu \cos xy}$$
$$= \frac{\mathrm{A}'y' + \mathrm{B}z' + \mathrm{B}''x' + \mathrm{C}'}{\nu + \cos yz + \mu \cos xy} = \frac{\mathrm{A}''z' + \mathrm{B}y' + \mathrm{B}'x' + \mathrm{C}''}{1 + \nu \cos yz + \mu \cos xz}.$$

VII. *Paraboloïdes*. — Ces dernières formules s'appliquent à un paraboloïde : μ et ν sont les coefficients angulaires d'un diamètre, x', y', z' étant les coordonnées du sommet, qui est le seul point où le plan tangent soit perpendiculaire à un diamètre.

Pour déterminer le sommet d'après ces formules, voir *Nouvelles Annales*, 1861, p. 307 et suiv.