NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FOURET

Sur la double génération des épicycloïdes planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 162-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__162_1>

SUR LA DOUBLE GÉNÉRATION DES ÉPICYCLOÏDES PLANES;

PAR M. FOURET,

Lieutenant du Genie.

Le fait de la double génération des épicycloïdes planes au moyen d'un cercle roulant sur un autre a été découvert par Euler pour le cas des épicycloïdes ordinaires; on en trouve une démonstration très-simple dans le *Traité de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel, 1re édit., t. Ier, p. 188. Je me propose de faire voir ici que la même propriété appartient aux épicycloïdes quelconques (allongées ou raccourcies). Dans une Note présentée à la Société Philomathique (*), j'ai déjà donné ce résultat comme conséquence d'autres propositions également nouvelles.

En voici une démonstration directe qui ne suppose de connu sur les épicycloïdes que la définition qu'on en donne ordinairement.

La démonstration s'appliquant également au cas de

(*) *Voir* dans l'*Institut* l'extrait du procès-verbal de la séance du 17 mai 1868.

l'hypocycloïde (*fig.* 1), et au cas de l'épicycloïde proprement dite (*fig.* 2), nous ne ferons qu'un seul raisonnement applicable aux deux figures.

Fig. 1. (Hypocycloïde.)

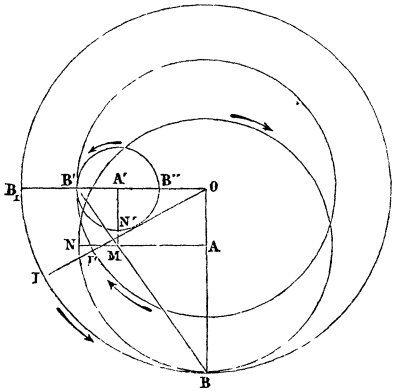
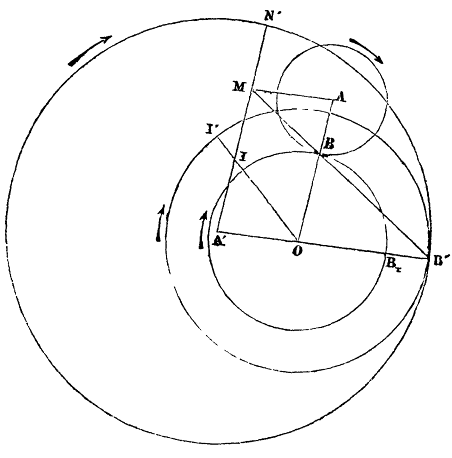


Fig. 2. (Épicycloïde.)



Soit M un point lié invariablement à une circonférence dont le centre est en A et engendrant une épicycloïde, tandis que cette circonférence roule intérieurement ou extérieurement sur une circonférence fixe dont le centre est en O. Menons par le point O une parallèle à la droite AM dans sa position actuelle, et prenons les points B′ et A′ où cette parallèle rencontre, d'une part, la droite qui joint le point M au point B de contact des deux circonférences, de l'autre la parallèle à OB menée par le point M. Décrivons deux nouvelles circonférences tangentes en B′ et ayant pour centres, l'une le point O, l'autre le point A′. Si nous faisons rouler le cercle A′ sur le nouveau cercle O, le point M entraîné par le cercle mobile engendrera la même épicycloïde qu'il décrivait primitivement, pourvu que les points de contact des cercles mobiles avec les cercles fixes se déplacent dans le même sens que précédemment ou en sens contraires, suivant qu'il s'agit d'une épicycloïde (*fig.* 2) ou d'un hypocycloïde (*fig.* 1), p. 163.

Pour le démontrer, soient N le point de rencontre de AM avec la circonférence (A), et I le point de la circonférence fixe correspondante avec lequel le point N est venu en coïncidence. On a

$$BI = BN.$$

Soit N′ le point de rencontre de A′M avec la circonférence (A′); je dis que le point de la circonférence fixe correspondante avec lequel N′ est venu en coïncidence est le point I′ situé sur la droite OI, c'est-à-dire que

$$B'I' = B'N'.$$

Désignons, pour abréger, AM par a, A′M par a_1, les rayons des deux cercles générateurs primitifs par R et R′, et les rayons des deux nouveaux par R_1 et R'_1. Puisque BI = BN par hypothèse, on a

$$\widehat{IOB} \times R = \widehat{MAB} \times R',$$

ou bien

$$\frac{\widehat{\text{IOB}}}{\widehat{\text{MAB}}} = \frac{R'}{R},$$

d'où

$$\frac{\widehat{\text{MAB}} \mp \widehat{\text{IOB}}}{\widehat{\text{MAB}}} = \frac{R \mp R'}{R'} \ (*).$$

Cette dernière proportion à cause de $OA = A'M$ donne identiquement la suivante

$$\frac{\widehat{\text{I}'\text{OB}'}}{\widehat{\text{MA}'\text{B}'}} = \frac{A'M}{OB} = \frac{A'B'}{OB'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\widehat{\text{I}'\text{OB}'}}{\widehat{\text{MA}'\text{B}'}} = \frac{R'_1}{R_1},$$

d'où

$$\widehat{\text{I}'\text{OB}'} \times R = \widehat{\text{MA}'\text{B}'} \times R'_1,$$

ou bien

$$B'I' = B'N'.$$

On voit, d'après cela, que si nous faisons rouler les circonférences mobiles sur les circonférences fixes dans le sens que nous avons indiqué ci-dessus, les points N et N' viendront coïncider respectivement avec les points I et I', et le point M, qu'il soit entraîné par l'une ou l'autre des deux circonférences mobiles, se trouvera toujours à ce moment sur la droite OII'. Il nous reste à faire voir qu'il occupera dans les deux cas la même position sur cette droite, c'est-à-dire que

$$MN' \pm MN = II'.$$

(*) Toutes les fois que nous mettrons le double signe devant un terme, le signe supérieur se rapportera à la *fig.* 1 et l'inférieur à la *fig.* 2.

En effet, on voit facilement sur les *fig.* 1 et 2, p. 163, que

$$MN = \pm(R' - a),$$
$$MN' = \pm(a_1 - R'_1),$$

d'où

$$MN' \pm MN = \pm(a_1 - R'_1) + (R' - a),$$

ou à cause de

$$a = OA' = \pm(R_1 - R'_1),$$
$$a_1 = OA = R \mp R',$$
$$MN' \pm MN = \pm(R - R_1) = II'.$$

Ce qu'il s'agissait de démontrer.

Remarques. — 1° On peut facilement trouver l'expression de a_1, R_1 et R'_1 en fonction de a, R et R'. Nous venons de trouver

$$(1) \qquad a_1 = R \mp R'.$$

Les triangles semblables BAM', BOB' donnent la proportion

$$\frac{R_1}{a} = \frac{R}{R'},$$

d'où

$$(2) \qquad R_1 = a\frac{R}{R'}.$$

Les triangles semblables BAM, MA'B' donnent

$$\frac{R'_1}{a} = \frac{a_1}{R'},$$

d'où, à cause de (1),

$$(3) \qquad R'_1 = a\frac{R \mp R'}{R'}.$$

Les formules (2) et (3) donnent pour le cas particulier des épicycloïdes ordinaires les résultats que l'on connaît.

En y faisant $a = R'$, on obtient

$$R_1 = R,$$
$$R'_1 = R \mp R',$$

et, par suite, (1) donne

$$a_1 = R'_1.$$

2° Nous avons vu que lorsque le point M décrit l'épicycloïde, on peut le supposer entraîné par l'une ou l'autre des circonférences (A), (A') roulant simultanément sur la circonférence fixe correspondante; il est facile de trouver le rapport des vitesses angulaires des centres A et A'. En effet,

$$\frac{\widehat{IOB}}{\widehat{IOB_1}} = \frac{\text{arc IB}}{\text{arc IB}_1};$$

or

$$\frac{\text{arc IB}_1}{\text{arc I}'\text{B}'} = \frac{R}{R_1},$$

donc

$$\frac{\widehat{IOB}}{\widehat{IOB_1}} = \frac{\text{arc IB}}{\text{arc I}'\text{B}'}\cdot\frac{R_1}{R} = \frac{R'}{R'_1}\cdot\frac{R_1}{R} = \frac{a}{R'_1} = \frac{R'}{a_1}.$$

Tel est le rapport des vitesses angulaires des centres des deux circonférences (A) et (A').

Dans le cas des épicycloïdes ordinaires, ce rapport est égal au rapport des rayons des deux circonférences mobiles, puisque $a = R'$ et $a_1 = R'_1$.

3° Nous avons laissé de côté le cas où la circonférence mobile renferme à son intérieur la circonférence fixe sur laquelle elle roule; mais la démonstration que nous avons faite appliquée à la *fig.* 2, nous montre que réciproquement si (A') était le cercle roulant primitivement sur le cercle (O) renfermé dans son intérieur, l'épicycloïde engendrée par le point M lié à ce cercle pourrait être engendrée au moyen du cercle extérieur (A) roulant sur un cercle fixe concentrique au premier, les rayons des nouveaux cercles se déduisant des formules (1), (2), (3), et les centres des circonférences mobiles tournant dans le même sens.

Nous pouvons maintenant conclure de ce qui précède que :

Toute épicycloïde (ordinaire, allongée ou raccourcie) peut être engendrée par le roulement de deux cercles de rayons différents sur deux autres cercles également différents, mais concentriques. Les rayons des nouveaux cercles se déduisent de ceux des anciens au moyen des formules (1), (2), (3); *et les points de contact des cercles mobiles avec les cercles fixes qui leur correspondent se déplacent dans le même sens ou en sens contraires, suivant que l'épicycloïde engendrée est extérieure ou intérieure.*

Remarque. — La première partie de la Question 437 est une conséquence immédiate du théorème que nous venons de démontrer. *Voir* une solution de cette Question, *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. VII, p. 37.