NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Démonstration de deux théorèmes d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 97-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__97_0>

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES D'ALGÈBRE;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

La théorie des *nombres directifs*, de Mourey, procure une démonstration intuitive de plusieurs théorèmes importants, entre autres : 1° du théorème de Cauchy sur le nombre de points-racines contenus dans un contour fermé ; 2° du principe fondamental de la théorie des équations algébriques.

Mais d'abord il faut expliquer au lecteur que les nombres directifs sont la réalisation des symboles imaginaires de l'algèbre.

A cet effet, soit tracée une droite sur un plan, et soit pris sur cette droite un point pour origine.

On peut marcher sur cette droite, soit de gauche à droite, ce qui est le sens généralement appelé *positif;* soit de droite à gauche, sens *négatif*. Mais on peut aussi tracer, au-dessus comme au-dessous de cette droite, des chemins rectilignes qui lui soient inclinés sous des angles quelconques.

Si a est le nombre abstrait qui marque le rapport de longueur d'un de ces chemins à l'unité linéaire, ce nombre a peut convenir à une infinité de chemins différents qui auront la même longueur, sans avoir la même direction. Mais si l'on affecte ce nombre d'un indice marquant l'angle que fait la direction du chemin que l'on considère avec celle des chemins positifs (*avec celle de l'unité positive*); si l'on écrit a_ω, ω étant l'angle dont il s'agit, on aura un symbole propre à ce chemin et exclusif de tous les autres.

Par exemple, si l'angle droit est pris pour unité, a_1 et a_{-1} seront les symboles des deux chemins de longueur a tracés perpendiculairement à la direction positive et opposés l'un à l'autre; a_2 et a_{-2} marqueront tous deux un chemin incliné de deux angles droits; ils équivaudront l'un et l'autre au chemin négatif $-a$. Plus généralement $a_{\omega+1}$ et $a_{\omega-1}$ seront les deux chemins perpendiculaires à a_ω; et $a_{\omega+2}$ aussi bien que $a_{\omega-2}$ représenteront le chemin qui lui est opposé. Enfin, de même que, dans les formules ordinaires de l'algèbre, un symbole littéral, quoique dénué de signe apparent, implique à la fois la grandeur métrique et l'état (positif ou négatif) du nombre, ainsi le symbole littéral peut impliquer l'angle de direction sans en porter l'indice explicitement.

Des nombres qui expriment à la fois une longueur et une direction : c'est là l'idée majeure introduite par Mourey; c'est ce qu'il appelle des *nombres directifs*. Il établit les règles de calcul qui leur conviennent (*), et il se trouve que ces règles coïncident exactement avec celles du calcul des imaginaires, fait capital sur lequel doit se porter l'attention des personnes qui s'intéressent au progrès des *méthodes d'enseignement;* car une telle coïncidence étant une fois reconnue, la science sera en possession de NOMBRES RÉELS correspondant aux expressions algébriques de la forme $a + b\sqrt{-1}$, et le fantôme des NOMBRES IMAGINAIRES se sera évanoui.

L'extrême importance de ce résultat me porte à lui

(*) Dans son petit Traité qui a paru en 1828 sous ce titre : *La véritable Théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires;* dédié aux amis de l'Évidence (1 vol. in-12). M. Gauthier-Villars en a publié récemment une nouvelle édition.

consacrer le paragraphe suivant avant d'en venir à l'objet spécial marqué par le titre de la présente Note.

II.

Pour mettre à l'abri de toute objection le fait que j'ai en vue, je prétends montrer que les règles du calcul directif ne sont pas subordonnées à des conventions nouvelles qu'on introduirait, comme on dit quelquefois, *pour les besoins de la cause*. Je veux montrer qu'elles se présentent comme des conséquences nécessaires : 1° de la nature des opérations élémentaires du calcul; 2° de la conception particulière des nombres directifs. Entrons donc dans le détail de ces règles.

Addition. — Pour additionner deux nombres directifs, on imaginera les deux chemins qui leur correspondent placés à la suite l'un de l'autre, c'est-à-dire l'origine du second placée au terme du premier. La *somme* demandée sera le nombre relatif au chemin qui conduit de l'origine du premier au terme du second placé comme il vient d'être dit.

Soustraction. — Pour retrancher b de a, on imaginera qu'à la suite du chemin A correspondant à a, on ait tracé un chemin B′ égal en longueur à celui qui correspond à b, mais dirigé en sens contraire. La *différence* demandée sera le nombre correspondant au chemin qui conduit de l'origine de A au terme de B′ (*).

Multiplication. — Le produit des deux nombres directifs a_ω, $a'_{\omega'}$ est égal à $(aa')_{\omega+\omega'}$, c'est-à-dire que sa lon-

(*) Pour s'assurer que ces deux premières règles n'ont rien d'arbitraire, il suffit d'observer que d'autres règles pour l'addition et la soustraction seraient en défaut lorsqu'il s'agirait de combiner deux chemins de même direction ou de directions opposées.

gueur est égale au *produit* des longueurs des deux facteurs, et son inclinaison égale à la *somme* de leurs inclinaisons.

D'après cette règle, chacun des éléments du produit, longueur et direction, est composé avec les éléments des deux facteurs selon l'idée fondamentale de la multiplication, c'est-à-dire composé avec l'élément du multiplicande comme l'élément correspondant du multiplicateur est composé avec l'unité. Cela est évident pour les longueurs; cela est vrai pour les directions; car on voit bien que le produit $(aa')_{\omega+\omega'}$ est incliné sur l'un des deux facteurs, précisément comme l'autre facteur est incliné sur l'unité (positive).

Division. — On aura l'avantage de confirmer la règle précédente si l'on établit directement celle de la division.

A cet effet, je vais résoudre le problème suivant : *Étant donné un nombre directif a_ω, trouver la forme nouvelle qui résultera pour ce nombre d'un changement d'unité ; par exemple, de ce qu'on prendrait pour nouvelle unité le nombre $a'_{\omega'}$.*

La forme demandée, que je représente provisoirement par x, devra exprimer par ses deux éléments les rapports, tant de grandeur que de direction, du nombre a_ω au nombre $a'_{\omega'}$. Or c'est l'objet propre de la division d'exprimer, par le moyen du quotient, le rapport du dividende au diviseur. Le problème proposé revient donc à la détermination du schèma suivant :

$$x = \frac{a_\omega}{a'_{\omega'}}.$$

D'ailleurs il est manifeste que la nouvelle unité linéaire étant a', la longueur du chemin correspondant à a_ω

aura désormais pour mesure $\frac{a}{a'}$, et il est également manifeste que l'angle de ce chemin avec le chemin mesuré par $a'_{\omega'}$ est $\omega-\omega'$; d'où il suit qu'on a

$$x=\left(\frac{a}{a'}\right)_{\omega-\omega'}.$$

On trouve donc, pour le quotient du nombre a_ω par $a'_{\omega'}$, précisément le nombre qui, multiplié par le diviseur, est propre, selon la règle de la multiplication, à reproduire le dividende.

Tels sont les principes généraux du calcul directif; et maintenant, sans qu'il soit nécessaire de s'arrêter à aucune application (*), son identité avec le calcul des imaginaires résulte manifestement de ce qu'on pourra toujours faire correspondre les deux éléments linéaire et angulaire d'un nombre directif avec le *module* et avec l'*argument* d'un nombre imaginaire.

(*) Toutefois donnons au moins le cas particulier d'un nombre directif a_ω multiplié par lui-même, c'est-à-dire *élevé au carré*. Ce sera d'après la règle de la multiplication $(a^2)_{2\omega}$; et si en particulier $\omega=\pm 1$, on aura

$$(a_{\pm 1})^2=a^2_{\pm 2}.$$

Mais on sait qu'un nombre incliné de deux angles droits est un nombre négatif; on a donc $(a_{\pm 1})^2=-a^2$; et par conséquent

$$\sqrt{-a^2}=a_{\pm 1}.$$

Voilà donc les *nombres à carré négatif* dont l'algèbre postule l'existence pour la résolution générale de l'équation du second degré comme elle postule les nombres négatifs pour la résolution de l'équation du premier degré. En particulier, les symboles prétendus imaginaires $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ sont réalisés par deux unités dirigées perpendiculairement au sens positif et opposées l'une à l'autre.

III.

J'arrive maintenant à une démonstration du théorème de Cauchy sur les contours fermés, démonstration qui, j'en préviens d'avance le lecteur, ne sera pas autre au fond que celle donnée autrefois par Sturm dans le *Journal de M. Liouville* (t. I[er], p. 290, en 1836). C'est que la démonstration de Sturm repose précisément, comme M. Liouville en a fait la remarque (t. IV de son Journal, p. 501) sur un lemme dont Mourey avait fait usage antérieurement pour démontrer que toute équation algébrique a au moins une racine. Mais Sturm a employé les symboles ordinaires de l'algèbre, et il n'est pas sans intérêt de reprendre sa démonstration pour voir ce que la franche adoption des idées de Mourey peut lui faire gagner, sinon en rigueur, au moins en concision.

Soit $F(z) = 0$ une équation algébrique du degré m, et soient $a, b, c, \ldots, l$ ses m racines, on a identiquement

$$F(z) = (z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-l);$$

et $a, b, c, \ldots, l$ sont des nombres mesurant les chemins qui conduisent de l'origine aux points-racines A, B, C, . . . , L.

Considérons z comme un nombre variable et représentons $F(z)$ par une autre variable u.

z sera le nombre directif mesurant le chemin OZ qui va de l'origine à un point mobile Z, lequel peut occuper sur le plan toutes les situations imaginables.

u mesurera un chemin OU dont l'extrémité U occupera a chaque instant une position unique déterminée par celle du point Z.

D'ailleurs, comme la somme des nombres directifs a et $z-a$ est z, il s'ensuit que $z-a$ mesure le chemin qui va de A à Z, le chemin AZ. Pareillement, $z - b$, $z - c, \ldots, z - l$ mesurent les chemins BZ, CZ, ..., LZ. Et puisqu'on a

$$u = (z - a)(z - b)(z - c)\ldots(z - l),$$

la longueur du chemin OU, pour chaque situation du point Z, est égale au produit des longueurs de AZ, BZ, CZ, ..., LZ, et son inclinaison est égale à la somme de leurs inclinaisons.

Supposons maintenant que le point Z parcoure, dans le sens de la rotation directe, un contour fermé. Quand il aura achevé sa révolution, les chemins AZ, BZ,..., LZ, et par conséquent aussi le chemin OU reprendront les longueurs qu'ils avaient au point de départ; mais ils ne reprendront pas tous leurs inclinaisons primitives.

En effet, considérons d'abord un point-racine A extérieur au contour. Pendant la révolution du point Z, l'inclinaison de AZ passera par des alternatives de croissance et de décroissance; mais ces alternatives se compenseront exactement; de sorte qu'ici les inclinaisons initiale et finale seront exactement les mêmes.

Au contraire, si A est à l'intérieur, l'inclinaison de AZ pourra bien encore, d'après la forme du contour, éprouver de telles alternatives; mais ses mouvements rétrogrades seront toujours suivis de mouvements directs, dont l'ensemble l'emportera sur les premiers; de sorte que, en fin de compte, le chemin AZ aura accompli dans le sens direct un tour entier; son angle directif sera donc augmenté d'une circonférence.

Cependant nous avons vu que l'inclinaison de OU est à chaque instant égale à la somme des inclinaisons de tous les facteurs AZ, BZ, ...; donc son mouvement autour de l'origine aura pu s'effectuer tantôt dans le sens direct, tantôt dans le sens rétrograde; mais son progrès en sens direct aura été prépondérant, de sorte qu'à la fin son inclinaison aura augmenté de μ circonférences, s'il y avait μ points-racines enfermés dans le contour que l'extrémité de la variable z a parcouru.

Le théorème de Cauchy est une conséquence immédiate de ces considérations préliminaires.

En effet, lorsqu'on remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, ce qui fait prendre à u la forme $P+Q\sqrt{-1}$, on sait que $\frac{P}{Q}$ est la cotangente de l'angle de OU avec la direction positive. Or, si cet angle s'accroît de μ circonférences par un mouvement toujours progressif dans le sens direct, sa cotangente passera 2μ fois du positif au négatif en s'évanouissant; dans ce même cas elle ne passera jamais du négatif au positif par zéro, elle aura donc éprouvé 2μ fois ce que nous avons appelé une *variation descendante* (*), sans d'ailleurs éprouver aucune *variation ascendante*. Mais si ce même angle, avant d'acquérir son accroissement final de μ circonférences, revient plusieurs fois en arrière, sa cotangente pourra avoir des variations ascendantes; mais celles-ci, à cause de la prépondérance des mouvements directs, donneront toujours lieu à un égal nombre de nouvelles variations descendantes; de là le théorème célèbre que : *Le nombre des points-racines contenus dans un contour fermé est égal au demi-excès du nombre des variations descendantes de la fonction* $\frac{P}{Q}$ *sur le nombre de ses variations ascendantes, lorsque le contour est parcouru dans le sens des rotations directes.*

Nota. — Qu'il y ait ou non des points-racines dans

(*) Dans un précedent article : *De la séparation des racines* (janvier 1868).

le contour fermé parcouru par l'extrémité de la variable z, la route parcourue en même temps par l'extrémité de la fonction u sera aussi un contour fermé, puisqu'à la fin la fonction reprend la même longueur avec une inclinaison qui ne peut différer de son inclinaison initiale que d'un nombre entier de circonférences. Seulement dans le premier cas, ce second contour contient l'origine O des chemins OU, et dans le second il ne le contient pas.

IV.

La démonstration précédente du théorème de Cauchy suppose connue la décomposition en facteurs du premier degré de tout polynôme algébrique entier, fonction d'une seule variable; et cette décomposition elle-même résulte, comme on sait, du principe fondamental de la théorie des équations algébriques, que *toute équation a une racine.*

On a, par les méthodes ordinaires de l'algèbre, plusieurs démonstrations de ce principe, qui toutes, soit par l'étendue des connaissances qu'elles exigent, soit seulement par leur complication, sortent du cadre des éléments. La théorie des nombres directifs en donne une démonstration facile, fondée sur la continuité des fonctions entières.

Je m'appuierai aussi sur ce fait, qu'*une équation du degré m ne peut avoir plus de m racines,* proposition qui est indépendante de la question de savoir si *toute équation a une racine.*

Soit donc z_0 une valeur particulière de la variable z, et soit u_0 la valeur correspondante de la fonction $u = f(z)$.

z_0 est le nombre directif qui mesure le chemin rectiligne allant de l'origine O à un certain point Z_0 ; et u_0 le nombre qui mesure un chemin correspondant OU_0. Je vais montrer qu'à partir du point Z_0, quel qu'il soit, il existe un chemin conduisant l'extrémité de la variable à un point-racine.

Soit h un accroissement directif de z_0; ce sera un accroissement de longueur fixe, mais dont on fera varier l'inclinaison depuis *zéro* jusqu'à 360 degrés, de sorte que l'extrémité de la variable $z_0 + h$ parcourra un cercle de rayon h ayant son centre au point Z_0. En même temps l'extrémité de la fonction décrira autour du point U_0 une courbe dont le rayon vecteur, lui-même directif, aura pour mesure

$$\Delta u_0 = f(z_0 + h) - f(z_0);$$

ou bien

$$\Delta u_0 = h\left[f' z_0 + \frac{h}{1.2} f''(z_0) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots m} f'''(z_0)\right].$$

Or, on pourra toujours prendre h assez petit pour que le facteur ci-dessus entre parenthèses diffère infiniment peu de son premier terme; car la somme directive de tous les termes suivants est moindre que la somme de leurs longueurs prises toutes dans le même sens; proposition qui est d'une évidence intuitive dans la théorie de Mourey, et qui équivaut à ce théorème du calcul des imaginaires que *le module d'une somme est inférieur à la somme des modules*. C'est pourquoi la direction du rayon vecteur Δu_0 relative à une inclinaison quelconque de h, différera toujours infiniment peu de la direction de son premier terme $hf'(z_0)$. Donc, lorsque h aura tourné d'un tour entier autour de z_0, ce qui fera coïncider tous les termes de Δu_0 avec leurs situations primitives, puisque d'une part les longueurs de ces termes sont demeurées les mêmes pendant tout le cours de la révolution de h, et que d'autre part leurs inclinaisons se trouvent à la fin augmentées toutes d'un nombre entier de circonférences, savoir : le premier terme $hf'(z_0)$ d'une circonférence;

le second terme $\frac{h^2}{1.2}f'(z_0)$ de deux circonférences, etc.; à ce moment final, l'extrémité de la fonction aura décrit autour du point U_0 *une courbe fermée à un seul tour.*

A la vérité, si $f'(z_0)$ était nul, cette courbe ne se fermerait qu'après n révolutions correspondantes à une seule révolution de h, en supposant que la première dérivée qui ne s'annule pas soit de l'ordre n; mais on peut écarter la supposition de $f'(z_0) = 0$ en choisissant convenablement z_0, puisqu'il y a sur le plan tout au plus $m - 1$ valeurs de z pouvant annuler $f'(z)$.

Pour que cette même courbe enveloppe réellement le point U_0, il faut que dans le cours de la révolution de h, la valeur de Δu_0 ne s'annule pas; or c'est ce qu'on peut admettre, sauf à concevoir que h ait été convenablement choisi, puisqu'il n'y a aussi que $m - 1$ valeurs de h au plus qui puissent annuler le polynôme

$$f'(z_0) + \frac{h}{1.2}f''(z_0) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots m}f^{m}(z_0).$$

Tout ceci bien compris, la démonstration du principe fondamental de la théorie des équations est aisée. En effet, concevons un chemin de forme quelconque U_0AO conduisant du point U_0 à l'origine O. Ce chemin rencontrera la courbe des Δu_0 en un point U_1 auquel correspondra un point déterminé Z_1 sur le cercle de rayon h et de centre Z_0, et l'on peut toujours supposer la rencontre U_1 choisie de telle sorte que $f'(z_1)$ ne soit pas nulle.

Autour du point Z_1 faisons décrire à l'extrémité de la variable z un cercle de rayon h'; l'extrémité correspondante de la fonction u tracera autour de U_1 une nouvelle courbe fermée. Cette courbe rencontrera le chemin U_1AO, ayant son origine en U_1, en un point U_2 auquel à son tour correspondra un certain point Z_2 sur le cercle de centre Z_1.

De nouveau autour de Z_2 faisons décrire à l'extrémité de la variable un cercle de rayon h'' choisi dans des conditions analogues aux précédentes, etc. En continuant ainsi, on fera répondre à tous les points du chemin U_0 AO tracé par l'extrémité de la fonction, les points d'un autre chemin $Z_0 Z_1 Z_2 \ldots$ qui sera tracé par les extrémités de la variable. Or quand l'extrémité de la fonction arrivera à l'origine O, c'est-à-dire quand elle s'annulera, l'extrémité de la variable sera manifestement arrivée à un *point-racine*. L'existence nécessaire d'un tel point est donc démontrée.

Mais pourquoi être conduit à un seul point-racine, lorsqu'on sait d'avance qu'il ne peut pas y en avoir un seulement, et que si l'équation quelconque du degré m a une première racine, elle en a $m-1$ autres nécessairement? Voici ce qu'il y a à répondre: maintenant, en effet, nous savons que toute équation du degré m a m racines. Donc à la valeur u_0 de la fonction u correspond d'abord la valeur z_0, puis $m-1$ autres valeurs de la variable; c'est-à-dire qu'au point unique U_0 correspondent m points Z_0, origines d'autant de chemins qui conduisent la variable à m points-racines pendant que l'extrémité de la fonction décrit le seul chemin U_0 AO.

Post-scriptum. — La Note qu'on vient de lire fait suite à l'article sur la *Séparation des racines* (janvier et février 1868), et sera elle-même suivie de deux autres articles concernant l'*Application de l'Algèbre directive à la Géométrie*. Dans le premier, je traiterai de l'interprétation des équations algébriques à deux variables, et, dans le second, de la discussion des équations relatives à des problèmes déterminés. On verra alors que la doctrine des nombres directifs qui s'aide de la Géométrie pour éclairer les premières difficultés de l'Algèbre, faisant disparaître l'antagonisme jusque-là maintenu entre les quantités dites réelles et les quantités prétendues imaginaires, et donnant ainsi à la théorie des équations l'unité qui lui manquait; on verra, dis-je, qu'elle offre à la Géométrie elle-même des ressources nouvelles. Et comme cette même doctrine règne déjà sans opposition dans le domaine de la haute analyse, on peut augurer qu'elle est destinée à transformer tôt ou tard les éléments mêmes de la science. D'ailleurs une circonstance imprévue me confirme dans cette opinion : c'est qu'en corrigeant les épreuves de cet article, j'ai sous les yeux la *Théorie élémentaire des quantités complexes* publiée tout récemment par M. Hoüel, dont le nom est bien connu des lecteurs de ce Journal. L'objet de l'auteur est précisément d'expliquer la représentation géométrique des quantités imaginaires par des grandeurs réelles. Dans la *première Partie* de son livre, la seule qui ait encore paru, M. Hoüel, après avoir donné des renseignements précieux sur l'*Histoire de la Théorie géométrique des imaginaires*, expose en détail les règles du nouveau calcul, et il en fait une très-belle application au principe fondamental de la théorie des équations. Il établit d'une manière simple et rapide, par rapport à toute équation algébrique $f(z) = 0$, qu'il existe dans la région finie du plan au moins une valeur de z qui rend minimum le module de $f(z)$, et que ce module minimum ne peut être autre que zéro. Or telle était, comme on sait, la déduction constituant la pénible démonstration algébrique donnée autrefois par Cauchy. Mais, pour etablir l'opportunité de la thèse que MM. les Rédacteurs des *Nouvelles Annales* m'ont autorisé à développer dans leur Recueil, je tiens surtout à citer textuellement le début du livre de M. Hoüel :

« Une des plus grandes difficultés qu'éprouvent les commençants en abordant l'étude de l'Algèbre, c'est, dit M. Hoüel, l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires. Les géomètres qui ont assis sur des bases inébranlables les règles du calcul de ces symboles ont rendu un immense service à la philosophie mathématique. On peut cependant ne pas se trouver encore pleinement satisfait de leurs démonstrations, qui sont d'une rigueur inattaquable sans doute, mais qui laissent subsister dans les Mathématiques des symboles de quantités et des signes d'opérations qui semblent ne correspondre à rien de réel. Les raisonnements généralement employés reviennent à établir qu'il y a *compensation entre deux absurdités*, savoir : entre la considération de quantités dont l'existence implique contradiction, et entre l'application à ces quantités d'opérations qui n'ont de sens que pour les quantités réelles. » (Hoüel, *Théorie élémentaire des quantités complexes*, p. 1.)

Si le lecteur veut bien se reporter à l'article *Sur le principe et la règle des signes* publié dans le numéro de juillet 1867 des *Nouvelles Annales*, article qui forme le préliminaire de toute cette exposition, il verra que M. Duhamel, dont l'autorité est généralement acceptée dans ces sortes de questions, admet et explique, dans son *Traité des Méthodes de raisonnement dans les sciences*, que certains symboles de l'Algèbre sont dénués de toute signification et sont soumis à des opérations auxquelles il faut bien se garder d'attribuer aucun sens ! Cette appréciation est, comme on voit, parfaitement conforme à celle de M. Hoüel ; mais celui-ci tend directement, par sa *Théorie des Nombres complexes*, à affranchir la science d'une si dure nécessité. Et, en effet, peut-on admettre définitivement au nombre des *méthodes de raisonnement dans les sciences* une méthode qui, selon l'énergique déclaration rapportée ci-dessus, procède par des COMPENSATIONS D'ABSURDITÉS ?