E. Lionnet

Note sur les diviseurs d'un nombre entier

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 68-72

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__68_0>

NOTE SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER;

PAR M. E. LIONNET.

1. THÉORÈME. — *Les diviseurs du produit ab de deux nombres premiers entre eux sont les produits obtenus en multipliant tous les diviseurs de a par chacun des diviseurs de b.*

Il suffit de démontrer : 1° que tous ces produits sont inégaux; 2° que chacun d'eux est un diviseur de ab; 3° que tout diviseur de ab est égal à l'un de ces mêmes produits.

1° Car si deux produits $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, dans lesquels α, α' sont diviseurs de a, et β, β' diviseurs de b, étaient égaux entre eux, α divisant $\alpha\beta$ diviserait aussi $\alpha'\beta'$; or, a étant premier à b, α diviseur de a est premier à β' diviseur de b; donc α diviserait α' : on prouverait de même que α' diviserait α; de sorte qu'on aurait $\alpha = \alpha'$, et, par suite, $\beta = \beta'$, ce qui est impossible, car, d'après la manière dont s'effectuent les multiplications, il n'y a pas de produits qui aient à la fois même multiplicande et même multiplicateur; donc $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont inégaux.

2° La relation

$$\frac{ab}{\alpha\beta} = \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\beta}$$

montre que, si α est diviseur de a et β diviseur de b, le quotient de ab par $\alpha\beta$ sera un nombre entier; donc $\alpha\beta$ est diviseur de ab.

3° Réciproquement, tout nombre d diviseur de ab est le produit d'un diviseur de a par un diviseur de b. Car si δ désigne le plus grand commun diviseur de a et d,

a' et d' les quotients premiers entre eux de a et d par δ, on aura $a = \delta a'$, $d = \delta d'$, et, par suite,

$$\frac{ab}{d} = \frac{\delta a' b}{\delta d'} = \frac{a' b}{d'};$$

or le quotient de ab par d est un nombre entier, donc d' est diviseur de $a'b$, et, par suite, diviseur de b; donc enfin d, égal à $\delta d'$, est le produit d'un diviseur de a par un diviseur de b.

Corollaire I. — Soit m le nombre des diviseurs de a, et n celui des diviseurs de b. En multipliant les m diviseurs de a par chacun des n diviseurs de b, on obtient mn produits qui sont, d'après ce qui précède, tous les diviseurs de ab; donc *le nombre des diviseurs de ab est égal au produit du nombre des diviseurs de a par celui des diviseurs de b.*

Corollaire II. — Le produit de deux sommes étant égal à la somme des produits de toutes les parties de la première par chacune des parties de la seconde, le produit de la somme des m diviseurs de a par celle des n diviseurs de b est égal à la somme des mn produits obtenus en multipliant tous les diviseurs de a par chacun des diviseurs de b, c'est-à-dire à la somme de tous les diviseurs de ab; donc *la somme des diviseurs du produit ab est égale à la somme des diviseurs de a multipliée par celle des diviseurs de b.*

Corollaire III. — m désignant un nombre entier quelconque, si l'on multiplie la $m^{ième}$ puissance α^m d'un diviseur de a par la $m^{ième}$ puissance β^m d'un diviseur de b, le produit $(\alpha\beta)^m$ sera la $m^{ième}$ puissance du diviseur $\alpha\beta$ de ab; donc *la somme des $m^{ièmes}$ puissances des diviseurs de ab est égale à la somme des $m^{ièmes}$ puissances des di-*

viseurs de a multipliée par celle des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de b.

2. Théorème. — *Lorsque plusieurs nombres a, b, c,..., k, l sont premiers entre eux deux à deux,* 1° *si l'on multiplie tous les diviseurs de a par chacun des diviseurs de b, puis tous les produits ainsi obtenus par chacun des diviseurs de c, etc., jusqu'à ce qu'on ait multiplié par chacun des diviseurs de l, ces derniers produits seront tous les diviseurs du produit abc...kl;* 2° *le nombre des diviseurs du produit abc...kl est égal au produit qui a pour facteurs le nombre des diviseurs de a, celui des diviseurs de b, etc., jusqu'au nombre des diviseurs de l;* 3° *la somme des diviseurs du produit abc...kl est égale au produit qui a pour facteurs la somme des diviseurs de a, celle des diviseurs de b, etc., jusqu'à la somme des diviseurs de l;* 4° *la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs du produit abc...kl est égale au produit qui a pour facteurs la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de a, celle des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de b, etc., jusqu'à la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de l.*

En effet, le produit abc de trois facteurs premiers entre eux deux à deux, pouvant être considéré comme un produit $ab \times c$ de deux facteurs premiers entre eux, on en déduit que le théorème précédent et ses corollaires, démontrés pour un produit de deux facteurs, se trouvent établis pour un produit de trois facteurs, puis, pareillement, pour un produit $abcd$ ou $abc \times d$ de quatre facteurs, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs.

Remarque. — En désignant par $\Sigma(N)$ la somme des puissances, d'un même degré $m =$ ou > 0, de tous les diviseurs d'un nombre entier quelconque N, les trois dernières parties de l'énoncé du théorème précédent se trouveront exprimées par la seule formule

$$\Sigma_m(abc\ldots kl) = \Sigma_m(a)\,\Sigma_m(b)\,\Sigma_m(c)\ldots\Sigma_m(l)$$

analogue à la suivante, que l'on doit à Gauss,

$$\varphi(abc\ldots kl) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\ldots\varphi(l),$$

dans laquelle $\varphi(\mathrm{N})$ indique, d'après la notation d'Euler, le nombre des entiers inférieurs et premiers à N.

3. Problème. — *Étant donné un nombre entier* $\mathrm{N} > 1$, *trouver tous ses diviseurs, leur nombre* n, *leur somme* $\Sigma_1(\mathrm{N})$ *et la somme* $\Sigma_m(\mathrm{N})$ *de leurs* $m^{\text{ièmes}}$ *puissances.*

Lorsque N est une puissance a^α d'un nombre premier, les diviseurs de N et leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$ sont les termes des progressions géométriques

$$\begin{array}{llllll} 1, & a, & a^2, & a^3,\ldots, & a^\alpha, \\ 1, & a^m, & a^{2m}, & a^{3m},\ldots, & a^{m\alpha}; \end{array}$$

et, par suite,

$$n = \alpha + 1, \quad \Sigma_1 = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}, \quad \Sigma_m = \frac{a^{m(\alpha+1)} - 1}{a^m - 1}.$$

Dans le cas plus général où N est un produit

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$$

de plusieurs puissances de nombres premiers $a, b, c, \ldots, l$ inégaux et supérieurs à l'unité, ces puissances étant premières entre elles deux à deux, on trouvera (2) les diviseurs de N en multipliant les diviseurs de a^α par chacun des diviseurs de b^β, puis les produits ainsi obtenus par chacun des diviseurs de c^γ, etc., jusqu'à ce qu'on ait multiplié par chacun des diviseurs de l^λ. On aura de même (n° 2) les formules

$$n = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots(\lambda + 1),$$

$$\Sigma_1(N) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdots \frac{l^{\lambda+1} - 1}{l - 1},$$

$$\Sigma_m(N) = \frac{a^{m(\alpha+1)} - 1}{a^m - 1} \cdot \frac{b^{m(\beta+1)} - 1}{b^m - 1} \cdots \frac{l^{m(\lambda+1)} - 1}{l^m - 1},$$

dont la dernière se transforme en la précédente pour $m = 1$.

Corollaire I. — Lorsque N est un carré, tous les exposants α, β, ..., λ sont des nombres pairs, et, par suite, chacun des facteurs de n est impair; donc leur produit n est aussi un nombre impair. Lorsque N n'est pas un carré, l'un au moins des exposants α, β, ..., λ est impair, et, par suite, l'un au moins des facteurs de n et n lui-même sont des nombres pairs; donc, *suivant qu'un nombre entier est ou n'est pas un carré, le nombre de ses diviseurs est impair ou pair, et réciproquement.*

Corollaire II. — Tout diviseur commun à plusieurs nombres a, b, c, ..., divisant leur plus grand commun diviseur D, et réciproquement, tout diviseur de D divisant chacun de ces nombres, il en résulte qu'on obtiendra tous les diviseurs communs à a, b, c, ..., leur nombre, leur somme et celle de leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$, en cherchant leur plus grand commun diviseur D, puis tous les diviseurs de D, leur nombre n, leur somme $\Sigma_1(D)$ et la somme $\Sigma_m(D)$ de leurs $m^{\text{ièmes}}$ puissances.