NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

De la séparation des racines

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 57-67

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__57_0>

DE LA SÉPARATION DES RACINES

(voir p. 25) ;

PAR M. ABEL TRANSON.

VII.

J'ai annoncé qu'on pouvait parvenir à ces résultats par une autre méthode.

J'observe d'abord que $F(z)$ devenant $P+Q\sqrt{-1}$ par la substitution de $x+y\sqrt{-1}$ à la place de z, on peut représenter les états successifs de la fonction $F(z)$ par la situation variable d'un point dont les abscisse et ordonnée sont respectivement P et Q, de la même façon que les états successifs de la variable indépendante z sont représentés par la situation du point (x, y).

Ou mieux encore, on peut considérer d'une part la variable z comme représentée *en grandeur et en direction* par le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au point (x, y); et d'autre part la fonction par le rayon vecteur qui va de l'origine au point dont l'abscisse est P et dont l'ordonnée est Q (*).

(*) Cetté idée de représenter (*de réaliser*) les quantités imaginaires par des *longueurs inclinées* est celle à laquelle Cauchy, après avoir varié plusieurs fois sur la façon d'expliquer l'emploi des imaginaires dans le calcul, s'est finalement arrêté. On sait aussi le grand parti que cet illustre géomètre, et plusieurs autres à sa suite, ont su tirer de cette conception pour perfectionner la théorie des séries, des intégrales définies, des fonctions doublement periodiques, etc. D'ailleurs on doit reconnaître que l'élégante systématisation du calcul des imaginaires résultant de la distinction du *module* et de l'*argument*, dès longtemps établie par Cauchy lui-même, était bien propre à faciliter l'acceptation de l'idée nouvelle, puisque ces deux éléments ne sont autre chose que la *longueur* et l'*incli-*

D'après cela, si on imagine que l'extrémité de la variable trace sur le plan des coordonnées un chemin quelconque, l'extrémité de la fonction parcourra un chemin correspondant. Et notamment, si l'extrémité de la variable décrit l'un des chemins

$$Q = 0, \quad P = 0 \quad \text{ou} \quad aP + bQ = 0,$$

l'extrémité de la fonction demeurera constamment, dans le premier cas, sur l'axe des x; dans le second cas, sur l'axe des y; et, dans le troisième cas, sur une droite menée par l'origine et dont le coefficient angulaire serait exprimé, selon la géométrie analytique, par l'expression $-\frac{a}{b}$.

Ceci entendu, reprenons notre problème sous sa forme générale; c'est-à-dire déterminons le calcul à faire pour trouver le nombre des points-racines de l'équation $F(z) = 0$ qui sont situés sur un arc de la courbe $aP + bQ = 0$.

Si, conformément à une indication de Prouhet déjà mentionnée ci-dessus, on multiplie $F(z)$ par $b + a\sqrt{-1}$,

---

naison de la grandeur RÉELLE que la géométrie fait désormais correspondre à des symboles algébriques pendant si longtemps *dénués de toute signification*! Néanmoins, ce serait, je le crois, manquer à la justice que d'attribuer à Cauchy le mérite d'avoir introduit une conception dont on se plait à reconnaître l'importance depuis qu'elle a obtenu l'appui d'une si haute autorité scientifique, mais enfin une conception que plusieurs auteurs, à la verité peu illustres, préconisaient vainement depuis bien longtemps; qui, par Mourey et par M. Faure, professeur émerite du lycée de Gap, avait déjà produit deux démonstrations très-simples du principe fondamental de la théorie des équations. Ce serait, dis-je, manquer à la justice, lorsque la vérité a été enfin intronisée, d'oublier ceux qui l'ont à leurs risques et périls tirée du puits! Et pour couper court, je constate que Cauchy lui-même, en affirmant pour la première fois la nouvelle doctrine, n'a pas omis de citer ceux qui en avaient préparé l'avénement : Buée, Argant, Mourey, MM. Faure (de Gap) et Vallès (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXII). AB. TR.

et qu'on représente le produit par $\varphi(z)$, les points-racines de $\varphi(z)=0$ seront les mêmes que ceux de $F(z)=0$; d'ailleurs on aura identiquement

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=bP-aQ+(aP+bQ)\sqrt{-1},$$

ou bien

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=P_1+Q_1\sqrt{-1};$$

de sorte qu'il s'agira de trouver les points-racines de $\varphi(z)=0$ sur un arc déterminé de la courbe $Q_1=0$.

Or, si l'extrémité de la variable z parcourt un arc de la courbe $Q_1=0$, nous savons que la fonction $\varphi(z)$ est représentée par une longueur constamment couchée sur l'axe des x; que l'extrémité de cette longueur peut osciller sur cet axe pendant que l'extrémité de la variable progresse sur la courbe Q_1 dans un sens déterminé et continu; enfin, que l'extrémité de la fonction vient coïncider avec l'origine chaque fois que la variable traverse un point-racine.

D'après cela, il est aisé de voir que quand la variable s'avance de l'un des points-racines vers un autre, la fonction a un signe déterminé, positif ou négatif, lequel demeure le même tant que la variable reste dans l'intervalle qui sépare ces deux points. Et encore il est manifeste que, quand la variable approche de traverser un point-racine, la fonction tend vers zéro, et au contraire s'en éloigne après ce passage. D'où il résulte que, si on suppose les coordonnées x et y, et par suite la variable z, exprimées en fonction de l'arc s de la courbe Q_1, et les accroissements de cet arc comptés positivement dans le sens du mouvement de la variable sur cette courbe, il résulte, dis-je, de tout ce qui précède que la fonction $\varphi(z)$ et sa dérivée $\varphi'(z)\dfrac{dz}{ds}$ seront de signes contraires avant le passage et de même signe après.

Dans ce résultat qui convient aux racines quelconques, on reconnaît une propriété bien connue des racines réelles. Quoi qu'il en soit, il est manifeste que le nombre des points-racines contenus sur un arc donné de la courbe Q_1 sera égal au nombre de variations ascendantes que le quotient

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)\dfrac{dz}{ds}}$$

éprouve lorsque la variable parcourt cet arc; et à cette occasion on remarquera que, pendant tout ce parcours, il n'y a que de telles variations; il n'y en a pas qui soient *descendantes :* c'est ce que nous avions annoncé précédemment.

Observons maintenant que, dans la circonstance actuelle, comme Q_1 est nul, on a $\varphi(z) = P_1$; de sorte que, par un calcul déjà effectué précédemment, on trouvera que le quotient ci-dessus équivaut à

$$\frac{P_1 \dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{dP_1}{dx}};$$

et par conséquent aussi à

$$\frac{(bP - aQ)\dfrac{dx}{ds}}{b\dfrac{dP}{dx} - a\dfrac{dQ}{dx}}.$$

On peut simplifier cette expression en remplaçant Q par $-\frac{a}{b}P$, et $\frac{dQ}{dx}$ par $-\frac{dP}{dy}$, ce qui, en supprimant le facteur constant $\frac{a^2+b^2}{b}$, l'amène à la forme définitive

$$\frac{P\frac{dx}{ds}}{b\frac{dP}{dx}+a\frac{dP}{dy}}.$$

Et enfin on peut supposer le périmètre de la courbe $aP+bQ=0$ partagé en une suite d'arcs pour lesquels le facteur $\frac{dx}{ds}$ soit constamment positif, sauf à parcourir chacun d'eux dans un sens convenable. Et alors on obtiendra finalement la proposition suivante :

Théorème I. — *Si l'extrémité de la variable z décrit un chemin continu le long duquel le rapport $\frac{P}{Q}$ soit constant et égal à $-\frac{a}{b}$, le nombre des points-racines de l'équation* $F(z)=0$ *rencontrés sur ce chemin sera égal au nombre des variations éprouvées par la fonction* $\frac{P}{b\frac{dP}{dx}+a\frac{dP}{dy}}$.

VIII.

A l'aide du théorème de Sturm, on peut toujours trouver le nombre des variations de cette fonction et par conséquent séparer toutes les racines lorsque x et y, qui sont déjà liées par la relation $aP+bQ=0$, peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'une nouvelle variable (*).

(*) Nous avons supposé dans tout ceci que l'équation proposée était à coefficients quelconques, c'est-à-dire de la forme $a+b\sqrt{-1}$, et la règle énoncée dans le texte se rapporte à la séparation des racines d'une telle équation quelle que soit leur nature. Mais pour l'application, il convient

Mais, si ces résultats ne peuvent pas être obtenus dans tous les cas, il n'est pas moins remarquable que, grâce à la représentation (*réalisation*) des quantités imaginaires par des longueurs inclinées, il soit si facile d'exprimer le principe de la *séparation des racines* sous une forme générale, c'est-à-dire indépendamment de leur nature.

De plus, il est deux autres principes de la théorie des équations qu'ordinairement on ne considère que par rapport aux racines réelles et qui, par l'emploi des mêmes considérations, s'étendent sans difficulté aux racines imaginaires; voici ce qu'il en est :

Supposé toujours que l'extrémité de la variable z passe d'un point à un autre du plan des xy par un chemin continu le long duquel le rapport $\frac{P}{Q}$ *conserve une valeur constante, et qu'on appelle* z_1 *et* z_2 *les valeurs de la variable aux extrémités de ce chemin;*

THÉORÈME II. — *Si* $F(z_1)$ *et* $F(z_2)$ *sont de signes contraires, le chemin parcouru contient au moins un point-racine de l'équation* $F(z) = 0$, *et il peut en contenir un nombre impair quelconque; si au contraire* $F(z_1)$ *et* $F(z_2)$ *sont de mêmes signes, le chemin parcouru ne contient aucun point-racine ou bien il en contient un nombre pair.*

---

d'observer que si le premier membre d'une telle équation admet des facteurs réels tant du premier que du second degré, on pourra toujours le décomposer en un produit de deux polynômes entiers dont l'un sera le produit de ces facteurs réels. En d'autres termes, une équation à coefficients de la forme $a + b\sqrt{-1}$ pourra toujours être supposée ne contenir ni racines réelles, ni racines imaginaires conjuguées. On peut même admettre qu'elle a été débarrassée préalablement de toute racine imaginaire de la forme simple $\beta\sqrt{-1}$. AB. TR.

Théorème III. — *Si z_1 et z_2 sont eux-mêmes, sur le chemin parcouru, deux points-racines consécutifs, il y a dans l'intervalle au moins un point-racine et généralement un nombre impair de points-racines de l'équation* $F'(z) = 0$.

Le théorème II n'est que le *principe des substitutions* entendu ici d'une manière générale. Le théorème III, que M. Liouville a depuis longtemps démontré dans son journal à l'aide du calcul, est une extension du *principe de Rolle*.

Ces deux théorèmes reçoivent une évidence intuitive des considérations par lesquelles j'ai établi ci-dessus le théorème I, qu'on peut appeler le *principe de la séparation des racines*. De plus je montrerai, dans un prochain article, que le théorème de Cauchy sur les *contours fermés*, et aussi la propriété fondamentale de toute équation d'*avoir au moins une racine*, deviennent, à l'aide des mêmes considérations, des vérités d'intuition.

Le rapprochement de ces résultats amène quelques réflexions sur lesquelles je m'arrêterai un instant.

IX.

MM. Briot et Bouquet, dans la Préface de leur *Théorie des fonctions doublement périodiques*, s'expriment de la manière suivante : « Il convient, disent-ils, de faire disparaître l'espèce d'antagonisme ou d'opposition que l'on a laissé subsister jusqu'à présent entre ce qu'on a appelé les quantités *réelles* et les quantités *imaginaires*. » Et, à ce propos, ils exposent, mais sans en faire l'historique, la conception à laquelle Mourey a donné une forme définitive : « Si dans un plan on prend un point fixe, que par ce point on mène un axe fixe, rien n'empêche de concevoir la quantité imaginaire comme une longueur portée à partir de l'origine dans une direction marquée par l'argument; la variation de cette grandeur *géométrique,* comme l'appelle Cauchy, sera figurée par le mouvement d'un point dans le plan. La variable réelle correspond au mouvement particulier du point mobile sur l'axe dans un sens ou dans l'autre. Cette extension donnée à l'idée de grandeur résout bien des difficultés qui se sont présentées dans la théorie des fonctions, et dont il était impossible de se rendre compte tant qu'on laissait la variable réelle, c'est-à-dire tant qu'on assujettissait le point mobile à se mouvoir sur l'axe. » (*Théorie,* Préf., p. XVIII.)

Ces deux auteurs se bornent à signaler l'heureuse influence de l'idée nouvelle sur la *théorie des fonctions,* qui est en effet leur objet spécial; mais n'y avait-il pas lieu de présumer que cette même extension de l'idée de grandeur pourrait éclairer aussi quelques difficultés propres à l'*algèbre élémentaire,* quelques difficultés auxquelles nous ne pensons plus, précisément peut-être parce que, sous peine de ne pas avancer, nous avons dû les franchir sans pouvoir nous en rendre compte; comme celle-ci, par exemple, qui s'est présentée à nous dès le début de nos études, que : pour la résolution générale de l'équation du second degré, il est requis l'existence (réputée impossible) de nombres à carrés négatifs! Et si tous les géomètres tombaient d'accord avec MM. Briot et Bouquet que *ce qui fait la variable être réelle, c'est qu'on assujettit son extrémité mobile à se mouvoir sur l'axe,* n'est-il pas manifeste qu'il n'y aurait plus d'autre distinction à faire entre les racines d'une même équation, si ce n'est que les unes étant représentées par des longueurs couchées sur l'axe, les autres le seraient par des longueurs inclinées; de sorte qu'il n'y aurait plus lieu de maintenir la dénomination d'*imaginaires* qu'on attribue à celles-ci, par opposition au nom de *réelles*, exclusivement donné aux premières, comme s'il s'agissait d'opposer LE NÉANT à L'ÊTRE!

Il est vrai que pour choisir avec sécurité entre plusieurs représentations dont chacune peut avoir quelque utilité propre, et notamment pour pouvoir affirmer que la théorie de Mourey sur les quantités dites imaginaires peut seule, et à l'exclusion de toute autre, éclaircir les difficultés de la théorie des fonctions et celles de l'algèbre élémentaire, il faut, chose d'ailleurs facile, s'être assuré préalablement que la grandeur géométrique, ayant pour mesure de sa longueur le *module* et pour mesure de sa direction l'*argument*, est bien la seule qui offre dans ses propriétés métriques et descriptives la RÉALISATION de toutes les propriétés analytiques du symbole $a + b\sqrt{-1}$ ou de son équivalent $\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ (*).

X.

Les trois résultats dont nous avons établi l'universalité pour les racines quelconques de toute équation à une

---

(*) C'est ce que j'établirai dans les articles qui suivront celui-ci; mais dans l'intérêt de toute une catégorie de lecteurs à laquelle s'adressent les *Nouvelles Annales*, je dois constater ici que la théorie indiquée dans ce paragraphe ne jouit pas, il s'en faut beaucoup, de l'assentiment unanime des géomètres. On doit considérer cette théorie comme n'étant pas encore sortie du domaine de la controverse. C'est pourquoi il doit être entendu que tout candidat aux Écoles de l'Etat pourra, sans crainte d'aucune disgrâce, continuer d'appuyer la théorie des imaginaires comme aussi la règle des signes, soit sur ce que « l'algèbre peut combiner des symboles dénués de toute signification, sous la seule condition de les combiner de manière à n'en déduire que des résultats dont la vérité est connue d'avance; » soit sur ce que « l'algèbre serait essentiellement l'art de combiner des signes et des formules littérales sans se préoccuper de leur signification concrète, possible ou impossible; » car tels sont les principes qui aujourd'hui ont cours dans l'enseignement. AB. TR.

seule inconnue, savoir : le *principe des substitutions*, le *principe de Rolle* et le *principe de la séparation des racines*, subsistent encore par rapport aux solutions réelles d'un système de deux équations à deux inconnues et à coefficients réels, soient

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = 0.$$

J'énoncerai ces trois principes sous leur forme analytique ; mais, pour en reconnaître intuitivement la vérité, on pourra s'aider de la géométrie, en considérant d'une part la courbe qui correspondrait sur le plan des x, y à l'une des deux équations données, par exemple à $\varphi(x, y) = 0$; et d'autre part la surface ayant pour ordonnée verticale l'autre fonction, c'est-à-dire la surface qui correspondrait à l'équation $z = \psi(x, y)$.

D'ailleurs j'appellerai *systèmes relatifs à* $\varphi(x, y)$, ou plus simplement *systèmes de* $\varphi(x, y)$, les systèmes de valeurs de x et y qui satisfont à l'équation $\varphi(x, y) = 0$; et j'appellerai *solutions* les systèmes de valeurs de x et y qui satisfont à la fois aux deux équations données $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Cela posé, on a les énoncés suivants :

I. *Principe des substitutions.* — Je suppose que par une suite de systèmes continus relatifs à $\varphi(x, y)$ on puisse passer du système (x_1, y_1) au système (x_2, y_2) et qu'on substitue ces deux systèmes extrêmes dans $\psi(x, y)$: 1^o si les deux résultats $\psi(x_1, y_1)$ et $\psi(x_2, y_2)$ sont de signe contraire, il y aura parmi les systèmes intermédiaires une solution au moins, ou bien plusieurs solutions en nombre impair ; 2^o si les deux résultats ψ_1 et ψ_2 sont de même signe, etc.

II. *Principe de Rolle.* — Si les systèmes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux *solutions consécutives*, il y aura parmi les systèmes intermédiaires de $\varphi(x, y)$ l'un d'eux au moins, ou plus généralement un nombre impair d'entre eux, qui rendront la fonction $\psi(x, y)$ un maximum ou un minimum, c'est-à-dire qui annuleront la fonction

$$\frac{\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}.$$

III. *Principe de la séparation des solutions.* — Tous les systèmes de $\varphi(x, y)$ intermédiaires à deux solutions consécutives donneront manifestement à $\psi(x, y)$ un signe invariable, positif ou négatif. Si on imagine ces systèmes intermédiaires substitués dans $\psi(x, y)$ selon leur ordre progressif, il est évident que le résultat s'éloignera de zéro pour des systèmes infiniment voisins d'une solution et s'éloignant de cette solution; au contraire, le résultat tendra vers zéro pour des systèmes s'approchant indéfiniment d'une solution. D'après cela, si on suppose x et y exprimés en fonction de l'arc de la courbe $\varphi(x, y) = 0$, de sorte que $\psi(x, y)$ soit à son tour une fonction de cet arc, fonction que je représenterai par $\psi(s)$, on verra que le nombre de solutions comprises entre deux systèmes de $\varphi(x, y)$ est égal au nombre des variations ascendantes qu'éprouve la fonction $\frac{\psi(s)}{\psi'(s)}$ lorsqu'on donne à s toutes les valeurs intermédiaires à celles qui correspondent aux systèmes extrêmes. On voit de plus que si la fonction $\psi(s)$ est rationnelle, on pourra, à l'aide du théorème de Sturm, *séparer* les solutions communes aux deux équations données.
