NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 84-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__84_1>

CORRESPONDANCE.

1. *M. Ch. Ruchonnet, de Lausanne.* — « Dans votre numéro de septembre dernier, vous avez publié un travail sur l'approximation, dans lequel l'auteur annonce : 1° *que la connaissance des m premiers chiffres d'un nombre suffit toujours pour en calculer la racine carrée avec m chiffres exacts quand la première tranche n'a qu'un chiffre, et, quand elle a deux chiffres, toutes les fois que le premier n'est point inférieur à* 4 ; 2° *que cette même connaissance suffit toujours pour calculer avec m chiffres exacts la racine cubique quand la première tranche a moins de trois chiffres, et, quand elle en a trois, toutes les fois que le premier n'est pas inférieur à* 3. Mais il y a moyen d'établir une formule de laquelle se déduisent *tous* les cas où l'on peut se borner à *m* chif-

fres du nombre considéré, ceux où il suffit d'en calculer $m-1$, etc., en supposant toujours que la racine soit demandée avec m chiffres exacts. Cette formule est applicable d'ailleurs aux racines de tous les degrés.

» Remarquons d'abord que l'erreur relative qui affecte la racine $n^{ième}$ d'un nombre approché par excès est moindre que la $n^{ième}$ partie de l'erreur relative du nombre lui-même. Désignons ce dernier par a, et soit α l'erreur absolue qui affecte sa valeur approchée, laquelle sera par conséquent $a+\alpha$, puisque nous la supposons approchée par excès : l'erreur relative de la racine $n^{ième}$ est égale à

$$\frac{\sqrt[n]{a+\alpha}-\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}}.$$

Désignant $\sqrt[n]{a+\alpha}$ par x, $\sqrt[n]{a}$ par y, et multipliant haut et bas par la somme

$$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1},$$

le numérateur devient α; quant au dénominateur, il prend une valeur plus grande que na, et qui se réduit à na quand on fait $\alpha=0$. L'erreur relative de $\sqrt[n]{a+\alpha}$ est donc moindre que $\frac{\alpha}{na}$, c'est-à-dire que la $n^{ième}$ partie de l'erreur relative de la valeur approchée de $a+\alpha$.

» Remarquons ensuite que l'erreur qui affecte la valeur approchée d'un nombre décimal est moindre qu'une unité de l'ordre de son $m^{ième}$ chiffre, lorsque l'erreur relative est inférieure à $\frac{1}{k.10^{m-1}}$, k désignant ce que devient le nombre quand on place la virgule à la suite de son premier chiffre significatif. Cela est évident. Concevons qu'on ait partagé a, à partir de la virgule, en tranches de n chiffres, et désignons par H ce que devient a quand on transporte la virgule à la suite de la première tranche à gauche, laquelle peut avoir moins de n chiffres : $\sqrt[n]{\mathrm{H}}$ est ce que devient $\sqrt[n]{a}$ quand on en transporte la virgule à la suite du premier chiffre significatif, et, par suite, l'erreur qui affecte la valeur approchée de $\sqrt[n]{a}$ est moindre qu'une unité de l'ordre de son $m^{ième}$ chiffre, si son erreur relative est inférieure à $\frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{H}}\,.\,10^{m-1}}$. Donc, d'après le théorème de tout à l'heure, pour que $\sqrt[n]{a}$ puisse être connu avec m chiffres exacts, il suffit que α satisfasse à l'inégalité

$$\frac{\alpha}{na} < \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{H}}\,.\,10^{m-1}}.$$

» Elle a toujours lieu, si l'on a calculé $m+1$ chiffres de a ; car alors $\frac{\alpha}{a}$, et à plus forte raison $\frac{\alpha}{na}$, est moindre que $\frac{1}{10^m}$, tandis que le second membre est plus grand que $\frac{1}{10^m}$, puisque $\sqrt[n]{\mathrm{H}}$ est plus petit que 10. Il suffit donc toujours de connaître $m+1$ chiffres d'un nombre pour calculer sa racine n^{ieme} avec m chiffres exacts. Cherchons les cas où l'on peut se borner à en calculer m, ou $m-1$, ou etc.

» Appelons p l'exposant de la puissance de 10 à laquelle appartiennent les plus hautes unités de a : p est positif ou négatif, selon que a est plus grand ou plus petit que l'unité, et il est égal à zéro, si a est compris entre 1 et 10. Il suffira des m premiers chiffres de a pour avoir $\sqrt[n]{a}$ avec m chiffres exacts, si l'inégalité précédente subsiste quand on y remplace α par 10^{p-m+1}, car cette puissance de 10 est une unité de l'ordre de celles que représente le $m^{ième}$ chiffre de a. Effectuant la substitution, puis multipliant les deux membres par 10^{m-1}, notre inégalité devient

$$\frac{10^p}{na} < \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{H}}},$$

ou, en désignant par h la valeur que prend a quand on transporte la virgule à la suite du premier chiffre significatif,

$$\frac{1}{nh} < \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{H}}}.$$

Chassant les dénominateurs et élevant les deux membres à la puissance n, on arrive à ce résultat que la connaissance des m premiers chiffres de a suffit toutes les fois qu'on a l'inégalité

$$(nh)^n > \mathrm{H}.$$

» Considérons en particulier les racines du second degré; il faut alors faire $n = 2$. La première tranche de a contient soit un, soit deux chiffres. Si elle n'en contient qu'un, on a

$$\mathrm{H} = h,$$

et l'inégalité précédente, résolue par rapport à h, devient

$$h > \frac{1}{4},$$

condition toujours satisfaite, puisque h est compris entre 1 et 10. Si la première tranche de a renferme deux chiffres, alors $\mathrm{H} = 10\,h$, et notre inégalité devient

$$h > \frac{10}{4} = 2,5.$$

Donc : *la connaissance des m premiers chiffres de a suffit toujours pour obtenir $\sqrt{a}$ avec m chiffres exacts lorsque la première tranche à gauche n'a qu'un chiffre,* *et, lorsqu'elle en a deux, toutes les fois que le nombre qu'elle forme n'est pas inférieur à* 25.

» Pour les racines cubiques, il faut faire $n=3$, et la première tranche de a peut avoir un, deux ou trois chiffres. Si elle ne contient qu'un chiffre, on a $H=h$, et l'on a $H=10h$ si elle en contient deux. L'inégalité ci-dessus, résolue par rapport à h, donne, dans le premier cas,

$$h>\sqrt{\frac{1}{27}},$$

et, dans le second,

$$h>\sqrt{\frac{10}{27}}.$$

Or, h étant par définition plus grand que 1, ces deux inégalités ont toujours lieu. Si la première tranche est formée de trois chiffres, alors $H=100h$, et il vient

$$h>\frac{10}{\sqrt{27}}=1,924\ldots\ldots$$

» Donc : *la connaissance des m premiers chiffres de a suffit pour obtenir $\sqrt[3]{a}$ avec m chiffres exacts lorsque la première tranche à gauche contient moins de trois chiffres, et, lorsqu'elle en contient trois, toutes les fois que le nombre formé par les premiers chiffres de a est, abstraction faite des virgules, supérieur à $\frac{10}{\sqrt{27}}$, soit à* 1924......

» Dans les racines des degrés supérieurs, il arrive souvent qu'on peut opérer avec moins de m chiffres de a. Par un raisonnement en tout semblable au précédent, on démontrera que la connaissance des $m-1$ premiers chiffres de a est suffisante pour obtenir $\sqrt[n]{a}$ avec m chiffres exacts lorsqu'on a l'inégalité

$$\left(n\frac{h}{10}\right)^n > \text{H}.$$

Déjà, dans les racines de troisième degré, cette inégalité a lieu toutes les fois que la première tranche de a ne renferme qu'un chiffre, et que le nombre formé par les premiers chiffres de a est, abstraction faite des virgules, supérieur à $\sqrt{\frac{10}{27}}$, soit à 6085......

» Il faut remarquer que, puisque c'est une valeur de a approchée par excès qu'on emploie, quand on aura calculé les m premiers chiffres de sa racine $n^{ième}$, il n'y aura pas lieu d'augmenter le dernier chiffre d'une unité. »

2. *M. H. Picquet, sous-lieutenant du génie.* — « Dans l'article que vous avez inséré sous mon nom dans votre numéro du mois d'avril dernier, j'indiquais un moyen de simplifier quelquefois le résultat d'une transformation polaire, lorsque par suite de la transformation d'un cercle en une conique les énoncés venaient à perdre tout l'intérêt de la simplicité. Au lieu d'introduire cette conique dans le nouvel énoncé, le moyen consistait à introduire le cercle décrit sur le grand axe de cette conique comme diamètre, lequel satisfaisait à certaines conditions résultant de celles qui étaient imposées à la conique; j'ai donné des exemples d'une pareille simplification. J'ai résolu à ce propos une question donnée par M. Mannheim, qui me fait remarquer une chose bien évidente, c'est que :

» *Un cercle a pour polaire réciproque par rapport à un cercle une conique dont le cercle podaire par rapport au foyer résulte aussi de la transformation du premier cercle par rayons vecteurs réciproques.*

» Il n'est donc pas étonnant de voir des cercles ayant même centre radical se transformer en d'autres cercles jouissant de la même propriété dans la méthode de transformation que j'exposais. Dès lors, voici comment il faudra résoudre la question de M. Mannheim. Transformons toujours par polaires réciproques la propriété suivante :

» *Toutes les circonférences circonscrites aux triangles conjugués à une conique ont pour centre radical commun le centre de cette conique.*

» Les transformées de toutes ces circonférences seront des coniques confocales inscrites respectivement dans les triangles conjugués à une conique fixe; les cercles podaires de ces coniques par rapport au foyer commun seront les transformés par rayons vecteurs réciproques des premiers cercles, donc ils auront même centre radical, d'où suit l'énoncé de M. Mannheim. Quant à la détermination de ce point, elle reste toujours la même (2e série, t. V, p. 152). La démonstration n'exigeait donc pas la connaissance de la propriété suivante (2e série, t. V, p. 149) :

» *L'angle sous lequel on voit du foyer commun de deux coniques confocales les points de contact d'une tangente commune est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles décrits sur leurs grands axes respectifs comme diamètres.*

» Ce théorème n'en persiste pas moins comme propriété curieuse, et les considérations qui précèdent en donnent l'explication philosophique. La méthode de transformation persiste aussi, mais simplifiée, puisqu'on n'aura qu'à transformer par rayons vecteurs réciproques les propriétés des cercles considérés, pour avoir les propriétés correspondantes des cercles ayant pour diamètres les grands axes des coniques obtenues par transformation polaire. Tout ceci s'étend naturellement à l'espace.

» Pour faire voir combien la considération de la podaire d'une conique par rapport à un foyer simplifie quelquefois les questions, même sans l'intervention d'aucune transformation polaire, je pourrai, par exemple, résoudre la question suivante proposée dans le numéro de juillet dernier :

» *Les axes des paraboles qui ont pour foyer un point donné et qui passent par deux autres points donnés sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole qui a pour foyers les deux derniers points donnés et qui passe par le premier point.*

» Il a été démontré (p. 146) que lorsqu'une conique a pour foyer un point F et passe par deux points A et B, sa podaire par rapport au point F est tangente aux cercles décrits sur FA et sur FB comme diamètres. En supposant que la conique soit une parabole, on voit :

» 1° *Qu'il y a quatre paraboles ayant pour foyer un point donné et passant par deux points donnés : deux sont imaginaires, puisque les cercles se coupant au point* F *n'ont que deux tangentes communes;* 2° *que les axes des deux paraboles réelles sont parallèles aux rayons de ces cercles qui aboutissent aux points de contact des tangentes communes.*

» Soient

$$\widehat{COO'} = \alpha, \quad OO' = d,$$

on a

$$\cos\alpha = \frac{R-r}{d}, \quad \tan\alpha = \frac{\sqrt{d^2-(R-r)^2}}{R-r}.$$

Considérons maintenant l'hyperbole ayant pour foyers les points A et B et qui passe par le point F; elle a son centre en I, et l'angle que forment ses asymptotes avec AB est donné par

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}.$$

Or sa distance focale est $2d$, son grand axe $2(\mathrm{R} - r)$; donc

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\sqrt{d^2 - (\mathrm{R} - r)^2}}{\mathrm{R} - r} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta.$$

C. Q. F. D. »