Gigon

Questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 398-407

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__398_0>

QUESTIONS DE LICENCE;

PAR M. GIGON,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

I. *Problème d'analyse proposé pour la licence ès sciences mathématiques* (Paris, session de juillet 1867).

II. *Intégration d'une classe particulière d'équations différentielles simultanées.*

III. *Applications.*

I.

PROBLÈME. — *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(1)\qquad (y+z)\frac{dz}{dx}+(z+x)\frac{dz}{dy}=x+y.$$

SOLUTION. — Cette question se ramène, comme on sait, à l'intégration des deux équations simultanées

$$(2)\qquad \frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y},$$

lesquelles, mises sous la forme suivante :

$$\frac{dx-dz}{x-z}=\frac{dy-dz}{y-z}=-\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)},$$

s'intègrent immédiatement; et l'on trouve alors, C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires, les deux intégrales des équations (2), savoir :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}(x-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}}&=C_1,\\ (y-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}}&=C_2.\end{aligned}\right.$$

Enfin, en appelant Φ une fonction arbitraire, la solution la plus générale de la proposée (1) sera

$$\Phi\left[(x-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}},\quad (y-z)(x+y+z)^{\frac{4}{2}}\right]=0.$$

Remarque. — Le procédé très-simple qui a fourni les intégrales du système proposé (2) réussit dans certains cas particuliers analogues à celui qu'on vient de traiter.

Mais il existe plusieurs autres moyens de parvenir aux intégrales (3). En effet, les équations (2), qui ne sont pas linéaires, peuvent être remplacées par un système équivalent de trois équations linéaires; il suffit de poser $\frac{dx}{y+z}=dt$, en désignant par t une variable auxiliaire qu'on prend pour variable indépendante.

La question est alors ramenée à trouver les trois intégrales des équations linéaires simultanées

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y+z,\\ \frac{dy}{dt} &= z+x,\\ \frac{dz}{dt} &= x+y. \end{aligned}\right.$$

Quand on aura trouvé d'une manière quelconque ces trois intégrales, on en déduira, par l'élimination de t, deux intégrales identiques ou équivalentes à (3). On pourra même, si l'on veut, se dispenser de ce calcul en conservant une équation de plus et en maintenant dans les formules la variable auxiliaire t.

Or, on sait que l'intégration des équations (4) peut se faire au moyen des méthodes générales (élimination ou méthode de d'Alembert.)

On peut encore y parvenir par le procédé suivant.

II.

Intégration d'un système d'équations différentielles simultanées en nombre quelconque, du premier ordre, linéaires et circulairement symétriques par rapport à toutes les variables dépendantes.

J'appelle système d'équations différentielles circulairement symétriques par rapport aux variables dépendantes, un système qui ne change pas quand on effectue sur ces variables une permutation circulaire.

Soit proposé un tel système (S) composé des n équations suivantes dans lesquelles t est la variable indépendante; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, des variables fonctions de t; $a, b, c, \ldots, h, q, r$ des coefficients numériques quelconques.

$$
(\mathrm{S})\left\{
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= ax_1 + bx_2 + cx_3 + \ldots + hx_{n-2} + qx_{n-1} + rx_n,\\
\frac{dx_2}{dt} &= ax_2 + bx_3 + cx_4 + \ldots + hx_{n-1} + qx_n + rx_1,\\
\frac{dx_3}{dt} &= ax_3 + bx_4 + cx_5 + \ldots + hx_n + qx_1 + rx_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_{n-2}}{dt} &= ax_{n-2} + bx_{n-1} + cx_n + \ldots + hx_{n-5} + qx_{n-4} + rx_{n-3},\\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= ax_{n-1} + bx_n + cx_1 + \ldots + hx_{n-4} + qx_{n-3} + rx_{n-2},\\
\frac{dx_n}{dt} &= ax_n + bx_1 + cx_2 + \ldots + hx_{n-3} + qx_{n-2} + rx_{n-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je considère les n racines de l'équation binôme

$$X^n = 1;$$

λ désignant la racine imaginaire $\cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$, on sait que ces n racines, toutes différentes entre elles, s'obtiennent en élevant successivement λ à la première, à la deuxième,..., à la $n^{ième}$ puissance; elles forment la suite

$$\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ldots,\ \lambda^{n-1},\ \lambda^n.$$

Si n est pair, l'équation binôme admet deux racines réelles, $\lambda^n = 1$ et $\lambda^{\frac{n}{2}} = -1$; si n est impair, elle n'admet qu'une racine réelle $\lambda^n = 1$. Toutes les autres racines sont imaginaires et conjuguées deux à deux; λ^p désignant une quelconque d'entre elles, sa conjuguée est λ^{n-p}.

Cela étant, je puis obtenir les n intégrales du système (S) de la manière suivante :

Premièrement, j'ajoute ensemble toutes les équations (S), j'intègre l'équation résultante, et je trouve, en désignant par la lettre e la base des logarithmes népériens et par K_1 une constante arbitraire, une première intégrale

$$(5)\quad K_1 = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\, e^{-(a+b+c+\ldots+q+r)t}.$$

En second lieu, mais dans le cas seulement où n est pair, et par conséquent où l'équation $X^n = 1$ admet la racine -1, je multiplie les équations (S), en commençant par la première, chacune respectivement par un des termes de la suite

$$(-1),\quad (-1)^2,\quad (-1)^3,\ldots,\quad (-1)^n,$$

c'est-à-dire par

$$-1,\quad +1,\quad -1,\ldots,\quad +1;$$

j'ajoute les résultats, j'intègre, et, K_2 désignant une constante arbitraire, j'obtiens une seconde intégrale

$$(6)\quad K_2 = (x_1 - x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} - x_n)\, e^{-(a-b+c+\ldots+q-r)t}.$$

Troisièmement, je prends une des racines imaginaires considérées ci-dessus, λ^p par exemple, p étant $< \frac{n}{2}$; je forme la suite

$$(a) \qquad \lambda^p, \quad \lambda^{2p}, \quad \lambda^{3p}, \ldots, \quad \lambda^{(n-1)p}, \quad \lambda^{np},$$

dans laquelle un terme quelconque reproduit une des racines de l'équation binôme $X^n = 1$; je multiplie respectivement chacune des équations (S) par un des termes de cette suite; j'ajoute les résultats; j'intègre l'équation que j'obtiens ainsi, et $(A_p + B_p\sqrt{-1})$ désignant une constante arbitraire imaginaire, j'ai l'intégrale suivante :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} &\lambda^p x_1 + \lambda^{2p} x_2 + \ldots + \lambda^{(n-1)p} x_{n-1} + \lambda^{np} x_n \\ &= (A_p + B_p\sqrt{-1})\, e^{(a\lambda^{np} + b\lambda^{(n-1)p} + c\lambda^{(n-2)p} + \ldots + q\lambda^{2p} + r\lambda^p)t}. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de la formule

$$e^{\xi\sqrt{-1}} = \cos\xi + \sqrt{-1}\sin\xi,$$

je transforme l'exponentielle imaginaire contenue dans l'expression (7); puis, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les deux membres, je décompose l'intégrale imaginaire (7) en deux intégrales réelles distinctes qu'on peut appeler les intégrales correspondantes aux racines conjuguées λ^p et λ^{n-p}; on vérifie, en effet, qu'on obtient une intégrale identique à (7) en employant, comme il vient d'être expliqué, non plus la racine λ^p, mais sa conjuguée λ^{n-p}. On vérifie, en outre, qu'on trouve toujours, à un facteur constant près, la même intégrale (7) quelle que soit celle des équations (S) qu'on multiplie par λ^p, premier terme de la suite (*a*), si l'on multiplie en même temps l'équation qui suit immédiatement celle-là par λ^{2p}, la suivante par λ^{3p},..., et si de la dernière équation (S) on passe ainsi à la première, de la première à la deuxième, etc.

En employant une autre racine $\lambda^{p'}$ de la même manière que λ^p, on obtiendra deux nouvelles intégrales réelles du système (S), et ainsi de suite.

En somme, en faisant, si n est pair,

$$p = 1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad \left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

et, si n est impair,

$$p = 1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad \left(\frac{n-1}{2}\right),$$

on obtiendra successivement et deux par deux, dans le premier cas, $(n - 2)$ intégrales, et dans le second cas, $(n - 1)$ intégrales des équations proposées; on y joindra, si n est pair, les deux intégrales (5) et (6) obtenues au moyen des racines $+1$ et -1 de l'équation binôme; et, si n est impair, l'intégrale (5) qui correspond à la racine $+1$. De cette manière, on aura formé dans tous les cas les n intégrales qui résolvent la question.

Il ne reste plus qu'à donner l'expression générale des intégrales réelles correspondantes aux racines conjuguées λ^p et λ^{n-p}.

Pour effectuer les calculs indiqués ci-dessus, on se sert de la notation suivante :

$$\begin{aligned}
\lambda^p &= \alpha_p + \beta_p \sqrt{-1}, \\
\lambda^{2p} &= \alpha_{2p} + \beta_{2p} \sqrt{-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\lambda^{ip} &= \alpha_{ip} + \beta_{ip} \sqrt{-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\lambda^{np} &= 1,
\end{aligned}$$

et l'on distingue deux cas, suivant que n est pair ou impair.

Si n est pair, on fait $n = 2m$; on remarque que $\lambda^{\frac{n}{2}p} = (-1)^p$; on désigne par f, k, g les coefficients constants occupant les rangs m, $(m+1)$, $(m+2)$ dans la suite $a, b, c, \ldots, q, r$; et l'on pose, afin d'abréger l'écriture,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\psi'_p &= (x_1 + x_{2m-1})\,\alpha_p + (x_2 + x_{2m-2})\,\alpha_{2p} + \ldots \\
&\quad + (x_{m-1} + x_{m+1})\,\alpha_{(m-1)p} + (-1)^p x_m + x_{2m}, \\
\psi''_p &= (x_1 - x_{2m-1})\,\beta_p + (x_2 - x_{2m-2})\,\beta_{2p} + \ldots \\
&\quad + (x_{m-1} - x_{m+1})\,\beta_{(m-1)p}, \\
\varphi_p &= a + (b+r)\,\alpha_p + (c+q)\,\alpha_{2p} + \ldots \\
&\quad + (f+g)\,\alpha_{(m-1)p} + (-1)^p k, \\
\chi_p &= (b-r)\,\beta_p + (c-q)\,\beta_{2p} + \ldots + (f-g)\,\beta_{(m-1)p}.
\end{aligned}\right.$$

Si n est impair, on appelle f et g les coefficients constants qui occupent les rangs $\left(\frac{n+1}{2}\right)$, $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ dans la suite $a, b, c, \ldots, q, r$, et l'on pose

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\psi'_p &= (x_1 + x_{n-1})\,\alpha_p + (x_2 + x_{n-2})\,\alpha_{2p} + \ldots \\
&\quad + \left(x_{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)\alpha_{\left(\frac{n-1}{2}\right)p} + x_n, \\
\psi''_p &= (x_1 - x_{n-1})\,\beta_p + (x_2 - x_{n-2})\,\beta_{2p} + \ldots \\
&\quad + \left(x_{\left(\frac{n-1}{2}\right)} - x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)\beta_{\left(\frac{n-1}{2}\right)p}, \\
\varphi_p &= a + (b+r)\,\alpha_p + (c+q)\,\alpha_{2p} + \ldots \\
&\quad + (f+g)\,\alpha_{\left(\frac{n-1}{2}\right)p}, \\
\chi_p &= (b-r)\,\beta_p + (c-q)\,\beta_{2p} + \ldots + (f-g)\,\beta_{\left(\frac{n-1}{2}\right)p}.
\end{aligned}\right.$$

En employant ces notations, on trouve que dans les deux cas les intégrales cherchées, résolues par rapport aux constantes arbitraires A_p et B_p, s'écrivent ainsi qu'il suit :

$$(10)\quad \begin{cases} A_p = e^{-\varphi_p . t}\left[\psi'_p . \cos(\chi_p . t) - \psi''_p . \sin(\chi_p . t)\right], \\ B_p = e^{-\varphi_p . t}\left[\psi''_p . \cos(\chi_p . t) + \psi'_p . \sin(\chi_p . t)\right]. \end{cases}$$

Les formules que l'on vient d'obtenir peuvent être appliquées à tout système d'équations simultanées, à coefficients numériques, comprises dans la classe (S) ; il n'y a plus qu'à remplacer les lettres $a, b, c, \ldots$; $\alpha_p, \alpha_{2p}, \ldots$, $\beta_p, \beta_{2p}, \ldots$, etc., par leurs valeurs.

Nous allons de cette manière parvenir à la solution de l'équation (1) ; nous traiterons ensuite quelques exemples plus compliqués.

III.

1° Reprenons les équations (4) ; ainsi que nous l'avons dit, elles rentrent dans la forme (S). Il faut leur appliquer les formules (5), (9) et (10), en faisant

$$n = 3, \quad p = 1, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad r = 1 ;$$

il suffit de considérer une des deux racines cubiques imaginaires de l'unité, et l'on a, par suite,

$$\alpha_1 = \frac{-1}{2}, \quad \beta_1 = +\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dans le cas actuel, l'intégrale (5) devient

$$(11)\qquad K_1 = (x + y + z)\, e^{-2t}.$$

D'après (9), on trouve

$$\varphi_1 = -1, \; \chi_1 = 0, \; \psi'_1 = \left(-\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z\right), \; \psi''_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - y).$$

Les intégrales (10) deviennent alors

$$(12)\quad \begin{cases} A_1 = e^t\left(-\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z\right), \\ B_1 = e^t\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,(x - y). \end{cases}$$

En éliminant t entre (11) et (12), on trouve facilement les deux équations

$$(13)\quad \begin{cases} (x-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}} = \text{const.}, \\ (y-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}} = \text{const.}, \end{cases}$$

identiques aux intégrales (3) précédemment obtenues.

2° Intégrer les équations simultanées

$$(14)\quad \frac{dx}{2x-6y+5z} = \frac{dy}{2y-6z+5x} = \frac{dz}{2z-6x+5y} = \ldots$$

Solution. — Ici n est impair et égal à 3; il suffit de considérer la racine imaginaire cubique de l'unité

$$\lambda = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}.$$

On applique les formules (5), (9) et (10) en faisant

$$a=2,\quad b=-6,\quad r=5,\quad \alpha_1 = \frac{-1}{2},\quad \beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad p=1.$$

Au moyen de la formule (5), on trouve d'abord

$$(15)\qquad K_1 = (x+y+z)e^{-t}.$$

Les formules (9) donnent

$$\psi'_1 = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z,\quad \psi''_1 = (x-y)\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varphi_1 = \frac{5}{2},\quad \chi_1 = -\frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Les formules (10) donnent

$$(16)\quad \begin{cases} A_1 = e^{\frac{-5}{2}t}\left[\left(\frac{2z-x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}(x-y)}{2}\sin\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}t\right)\right], \\ B_1 = e^{\frac{-5}{2}t}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\cos\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}t\right) - \left(\frac{2z-x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}t\right)\right]. \end{cases}$$

Les équations (15) et (16) représentent les intégrales du système proposé (14).

3° Intégrer les quatre équations simultanées

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{2x-y+5z-3u}=\frac{dy}{2y-z+5u-3x}\\ &=\frac{dz}{2z-u+5x-3y}=\frac{du}{2u-x+5y-3z}=dt. \end{aligned}\right.$$

Solution. — Dans le cas actuel, n est pair et égal à 4; parmi les racines quatrièmes de l'unité, nous avons à considérer les deux racines réelles $+1$ et -1, et l'une des deux racines imaginaires, $+\sqrt{-1}$ par exemple.

Pour appliquer les formules (5), (6), (8) et (10), nous faisons

$$a=2,\quad b=-1,\quad k=5,\quad r=-3,\quad p=1,\quad \alpha_1=0,\quad \beta_1=1.$$

Il vient alors, d'après (5),

$$(18)\qquad K_1=(x+y+z+u)\,e^{-3t},$$

et, d'après (6),

$$(19)\qquad K_2=(x-y+z-u)\,e^{-11t}.$$

Les formules (8) donnent

$$\psi'_1=u-y,\quad \psi''_1=x-z,\quad \varphi_1=-3,\quad \chi_1=2.$$

On trouve ensuite, d'après (10),

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} A_1&=e^{3t}\left[(u-y)\cos 2t-(x-z)\sin 2t\right],\\ B_1&=e^{3t}\left[(x-z)\cos 2t+(u-y)\sin 2t\right]. \end{aligned}\right.$$

(18), (19) et (20) représentent les quatre intégrales des équations (17).

On pourrait multiplier les exemples, et considérer des systèmes d'équations simultanées renfermant un plus grand nombre de variables; mais ce qui précède suffit pour indiquer dans tous les cas la marche à suivre.