NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PICART

Étude géométrique sur les surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 97-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__97_0>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES SURFACES

(voir p. 62);

Par M. A. PICART,
Professeur au lycée Charlemagne.

III. — Surface a lignes de courbure circulaires.

10. Une surface, dont toutes les lignes de courbure sont des cercles, peut être considérée comme l'enveloppe de deux séries de sphères touchant respectivement la surface suivant deux systèmes de cercles perpendiculaires entre eux. Or, il est clair que chaque sphère appartenant à l'un des modes de génération est tangente à toutes les sphères de l'autre système. D'ailleurs, la condition d'être tangente à trois sphères fixes détermine complétement les positions successives d'une sphère mobile. Donc, la surface à lignes de courbure circulaires peut être regardée comme l'enveloppe des positions d'une sphère tangente à trois autres.

C'est par ce mode de génération que M. Dupin a défini, le premier, la surface à lignes de courbure circulaires à laquelle il a donné le nom de *cyclide*.

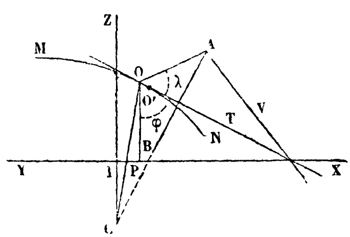
Nous nous proposons ici de rattacher la génération de cette surface aux propriétés générales des surfaces à lignes de courbure planes.

11. Une surface dont les lignes de courbure d'un système sont des cercles, pouvant être regardée comme l'enveloppe d'une série de sphères, cherchons sur quelle ligne doivent être situés les centres des sphères enveloppées, et quelle loi de variation doit suivre le rayon de ces sphères pour que le second système de lignes de courbure de la surface soit aussi circulaire.

12. Exprimons d'abord que les lignes de courbure du second système sont planes. Il faut et il suffit : 1° que les plans des lignes de courbure du premier système soient parallèles à une même droite; 2° que ces plans coupent la surface sous un angle dont le cosinus soit proportionnel au cosinus de l'angle qu'ils forment avec un plan parallèle à la droite (comme je l'ai démontré ailleurs, *Essai d'une théorie géométrique des surfaces*, 3e partie). La première condition exige que les centres des sphères enveloppées soient sur une courbe plane. La seconde va servir à déterminer la loi de variation du rayon de ces sphères.

Soit MN (*fig.* 2) le lieu des centres des sphères enve-

FIG. 2.



loppées. Considérons deux sphères consécutives ayant pour centres O et O'; elles se coupent suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à la tangente OT : soit AB le diamètre de ce cercle qui est dans le plan de la courbe MN. L'angle sous lequel le plan du cercle coupe la surface est égal à AOT. Il faut que le cosinus de cet angle soit proportionnel au cosinus de l'angle que le plan du cercle forme avec une certaine ligne XY située dans le plan de la courbe MN. Désignons par R le rayon de la sphère mobile, par z l'ordonnée OP de la courbe MN relativement à XY, par λ l'angle que le plan du cercle forme avec la surface, et par φ l'angle de ce plan avec XY : nous avons

$$dR = -OO' \cos\lambda,$$

$$dz = -OO' \cos\varphi,$$

d'où

$$\frac{dR}{dz} = \frac{\cos\lambda}{\cos\varphi} = \text{const.} = m,$$

d'où enfin

$$R = mz + m', \tag{3}$$

m' étant une constante.

On peut toujours supposer cette constante nulle : cela revient à transporter la ligne XY parallèlement à elle-même. Donc, *la surface enveloppe d'une sphère mobile aura toutes ses lignes de courbure planes, si le centre de la sphère se déplace sur une courbe plane et si le rayon de cette sphère varie proportionnellement à l'ordonnée de cette courbe par rapport à un axe quelconque* XY *situé dans son plan.*

On sait qu'en général les plans des lignes de courbure des deux systèmes sont respectivement parallèles à une même droite. Mais ici, il y a plus. *Les plans des lignes de courbure non circulaires passent tous par l'axe* XY. En effet, la relation $\frac{z}{\cos\varphi} = \frac{R}{\cos\lambda}$ exprime que la perpendiculaire AV au rayon OA rencontre la tangente OT sur l'axe XY. Les lignes de courbure circulaires peuvent donc être regardées comme appartenant à des sphères dont les centres sont sur la droite XY, et qui coupent la surface orthogonalement; par suite, d'après un théorème connu, les plans des lignes de courbure de l'autre système passent par l'axe XY (*).

(*) Ces surfaces à lignes de courbure circulaires dans un système et planes dans l'autre ont été étudiées pour la première fois par M. O. Bonnet

13. Exprimons maintenant que les lignes de courbure du second système sont aussi des cercles.

Il faut et il suffit que les plans des cercles du premier système passent par une même droite.

Cette condition est nécessaire, d'après le numéro précédent; de plus, elle est suffisante, car on sait que lorsque les lignes de courbure d'un système sont dans des plans passant par une même droite, les lignes de courbure de l'autre système sont sphériques; or, ces dernières sont déjà planes : elles sont donc circulaires.

Soit C le point du plan de la courbe MN par lequel passent les plans des lignes de courbure du premier système. Menons par ce point une perpendiculaire IZ à la droite XY; prenons ces deux droites pour axes de coordonnées, et désignons par x, z les coordonnées d'un point quelconque O de la courbe MN par rapport à ces deux axes.

Comme les plans des cercles d'intersection successive des sphères passent par le point C, les tangentes à toutes ces sphères, menées par le point C, sont égales. On a donc, en appelant k la longueur commune de ces tangentes et ρ le rayon vecteur CO,

$$\rho^2 = R^2 + k^2. \tag{4}$$

Mais, d'autre part,

$$R = mz,$$

$$\rho^2 = x^2 + (z - d)^2,$$

d étant la distance du point C à l'axe XY. Substituant les valeurs de ρ^2 et de R dans l'équation (4), on obtient

$$x^2 + (1 - m^2) z^2 - 2dz + d^2 - k^2 = 0. \tag{5}$$

---

dans un Mémoire remarquable *sur les surfaces à lignes de courbure planes et sphériques* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXV^e cahier).

C'est là l'équation de la courbe MN, lieu des centres des sphères enveloppées.

Cette équation représente une ligne du second ordre : une ellipse si m est < 1, une hyperbole si m est > 1, et une parabole si $m = 1$.

Remarquons que m est l'excentricité de la courbe.

De là résulte le mode de génération suivant de la surface cyclique :

La cyclide peut être regardée comme l'enveloppe des positions d'une sphère mobile dont le centre se déplace sur une courbe du second ordre et dont le rayon varie proportionnellement à la distance du centre à une droite fixe XY *perpendiculaire à l'un des axes de la courbe, le coefficient de proportionnalité étant l'excentricité de cette courbe.*

14. Il nous reste à bien préciser ce mode de génération en discutant successivement les trois formes que peut présenter le lieu des centres des sphères enveloppées.

1° *Ellipse* ($m < 1$).

Dans ce premier cas, la droite XY est évidemment perpendiculaire à l'axe focal.

Nous la supposerons d'abord extérieure à l'ellipse

$$(d^2 - k^2 > 0).$$

15. Désignons par z_1, z_2 les ordonnées des sommets A, A′ de la courbe situés sur l'axe focal. Le plan de cette courbe coupe la surface suivant deux cercles que nous appellerons *cercles principaux*. Ces deux cercles ont leurs centres sur l'axe AA′, et rencontrent cet axe en des points dont les ordonnées sont, pour l'un,

$$(1 - m)\, z_1, \quad (1 + m)\, z_2,$$

et, pour l'autre,

$$(1+m)z_1, \quad (1-m)z_2.$$

Les ordonnées de leurs centres sont, par conséquent,

$$\frac{(1-m)z_1+(1+m)z_2}{2}, \quad \frac{(1+m)z_1+(1-m)z_2}{2},$$

ou

$$\frac{z_1+z_2}{2}+\frac{m(z_2-z_1)}{2}, \quad \frac{z_1+z_2}{2}-\frac{m(z_2-z_1)}{2}.$$

Or, $\frac{z_1+z_2}{2}$ est l'ordonnée du centre de l'ellipse, $\frac{z_2-z_1}{2}$ est le demi-axe focal, et m est l'excentricité; donc *les cercles principaux ont pour centres les foyers de l'ellipse.*

On peut d'ailleurs le reconnaître d'une autre manière, en remarquant que l'ellipse est parcourue par le centre d'un cercle mobile qui reste tangent aux cercles principaux, et en se rappelant que le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés est une courbe du second ordre ayant pour foyers les centres des deux cercles.

16. Comme les cônes circonscrits à la surface le long des lignes de courbure circulaires du premier système ont leur sommet sur la droite XY, d'après le n° 12, il s'ensuit que *la droite* XY *est l'axe radical des cercles principaux.*

17. Quant au point C, par lequel passent les plans des lignes de courbure du premier système, il n'est autre que le point fixe de l'axe focal par lequel passent les cordes de contact des tangentes aux cercles principaux, menées par un point quelconque de l'axe radical de ces cercles. On reconnaît sans peine que *le point* C *divise la distance des centres* F *et* F′ *des cercles principaux dans le rapport de leurs rayons,* en d'autres termes, que *le point* C *est le centre de similitude interne des deux cercles principaux.*

18. De là une construction très-simple de la surface. *Que l'on décrive deux cercles intérieurs l'un à l'autre, que par leur centre de similitude interne on mène des transversales, et que sur les portions de ces transversales interceptées par les deux cercles, comme diamètres, on décrive des circonférences dans des plans perpendiculaires au plan de ces cercles, le lieu de toutes ces circonférences est une surface à lignes de courbure circulaires.*

Ces circonférences constituent le premier système de lignes de courbure. Quant aux lignes de courbure du second système, leurs plans passent par l'axe radical des deux cercles.

19. Remarquons que *les perpendiculaires élevées au milieu des segments qu'interceptent les deux cercles sur les transversales enveloppent une ellipse qui a pour foyers les centres de ces cercles.*

20. Les lignes de courbure du second système de la surface sont les intersections successives d'une seconde série de sphères. *Les centres de ces sphères sont aussi sur une conique,* et l'on voit facilement que cette conique, située dans un plan perpendiculaire au plan de l'ellipse, a pour sommets les foyers et pour foyers les sommets de cette ellipse. Dès lors, *le lieu des centres est une hyperbole.*

Le coefficient m', relatif aux sphères du second système, est réciproque de m, et la droite $X'Y'$, analogue à XY, est, pour ces sphères, la perpendiculaire au plan de l'ellipse menée par le point C.

21. Si la droite XY est tangente à l'ellipse, les cercles principaux sont tangents intérieurement. Si la droite XY rencontre l'ellipse, les deux cercles principaux se coupent

sur cette droite Sauf ces circonstances particulières, la construction de la surface reste la même.

2° *Hyperbole* $(m > 1)$.

22. Comme le lieu des centres des sphères du second système est une ellipse, ce cas rentre dans le précédent.

Mais il y a à examiner si, dans le cas de l'hyperbole, la droite XY doit toujours être perpendiculaire à l'axe focal de la courbe.

Pour cela, nous résoudrons la question suivante :

Le centre d'un cercle se meut sur une courbe du second ordre qui, rapportée à l'un de ses axes comme axe des x, et à une perpendiculaire à cet axe comme axe des y, a pour équation

$$x^2 + (1 - m^2)y^2 + 2Ay + B = 0;$$

le rayon de ce cercle en chaque point de la courbe est égal à l'ordonnée de ce point multipliée par l'excentricité m. Quelle est l'enveloppe de ce cercle mobile?

Nous avons déjà reconnu indirectement, par les considérations géométriques qui précèdent, la nature de cette enveloppe, dans le cas où l'axe des x est perpendiculaire à l'axe focal de la courbe. Mais l'analyse seule peut nous éclairer sur le cas où l'axe des x est perpendiculaire à l'axe non transverse de l'hyperbole.

Le procédé analytique bien connu, que l'on applique à la recherche des enveloppes, conduit à l'équation

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[(X^2 + Y^2)\sqrt{1 - m^2} + \frac{2AY}{\sqrt{1 - m^2}} + B\sqrt{1 - m^2}\right]^2 \\ &\qquad - 4m^2Y^2\left[\frac{A^2 - B(1 - m^2)}{1 - m^2}\right] = 0, \end{aligned} \right.$$

qui se décompose en deux, savoir :

$$(7)\quad X^2 + Y^2 + \frac{2\left(A + m\sqrt{A^2 - B(1 - m^2)}\right)}{1 - m^2}Y + B = 0;$$

$$(8)\quad X^2 + Y^2 + \frac{2\left(A - m\sqrt{A^2 - B(1 - m^2)}\right)}{1 - m^2}Y + B = 0.$$

Ces équations représentent deux cercles dont les centres, situés sur l'axe des y, ont pour ordonnées

$$-\frac{A + m\sqrt{A^2 - B(1 - m^2)}}{1 - m^2},$$

et

$$-\frac{A - m\sqrt{A^2 - B(1 - m^2)}}{1 - m^2}.$$

Pour que ces ordonnées soient réelles, il faut que $A^2 - B(1 - m^2)$ soit > 0; or, c'est là la condition pour que l'axe des y rencontre la courbe; on voit donc que l'enveloppe n'est réelle, dans le cas de l'hyperbole, que lorsque la droite XY est perpendiculaire à l'axe focal.

De plus, on vérifie facilement que les ordonnées des centres ne sont autres que celles des foyers de la courbe.

Remarque. — De ce fait général, que pour l'ellipse et l'hyperbole, dans le cas où la droite XY est perpendiculaire à l'axe focal, les cercles enveloppes ont pour centres les foyers de la courbe, nous aurions pu induire que, dans le cas où la droite XY est perpendiculaire au petit axe de l'ellipse ou à l'axe non transverse de l'hyperbole, l'enveloppe est imaginaire, car la définition analytique des foyers donne deux foyers imaginaires sur l'axe non transverse de l'hyperbole comme sur le petit axe de l'ellipse. Mais il n'était pas inutile, pour plus de certitude, de vérifier ce résultat par l'analyse.

3° *Parabole* ($m = 1$).

23. Soit d'abord $d^2 - k^2 > 0$: la droite XY est extérieure à la parabole.

L'un des cercles principaux se réduit à la droite XY. L'autre a pour centre le foyer de la courbe et pour rayon la différence entre la distance de ce foyer à la droite XY et le paramètre de la parabole.

Quant au point C, il est à l'intersection de ce cercle avec l'axe focal.

24. De là la construction suivante :

Si l'on considère un cercle et une droite extérieure, qu'on prenne l'un des points où la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la droite rencontre ce cercle, que par ce point on mène une série de transversales, et que sur les portions de ces transversales interceptées par la droite et le cercle, comme diamètres, on décrive des circonférences dans des plans perpendiculaires au plan du cercle, le lieu de toutes ces circonférences est une surface à lignes de courbure circulaires.

25. Remarquons que les perpendiculaires élevées au milieu des segments qu'interceptent sur les transversales la droite et le cercle enveloppent une parabole qui a pour foyer le centre du cercle et pour paramètre la distance minimum ou maximum de ce cercle à la droite.

26. Les sphères du second système ont également leurs centres sur une parabole située dans un plan perpendiculaire à celui de la première, et ayant pour foyer le sommet et pour sommet le foyer de cette première parabole.

27. Si la droite XY rencontre la parabole, le cercle principal passe par les points d'intersection. La surface

est alors composée de deux parties : l'une fermée et limitée dans le plan de la courbe par la droite XY et l'arc de cercle qu'elle sous-tend, l'autre à nappes infinies.

28. Les surfaces qui constituent le système triple orthogonal du § II appartiennent à cette dernière catégorie de surfaces cycliques. Considérons, par exemple, la surface relative au point A, n° 6, et désignons par α la distance OA, par b la demi-distance focale de la section principale située dans le plan XOY, et par c la demi-distance focale de la section principale située dans le plan XOZ (nous supposerons $c > b$); du point A, menons des tangentes à la conique excentrique située dans le plan XOY, la corde de contact MN de ces tangentes appartient à la surface; cette corde est à une distance du centre égale à $\frac{c^2}{\alpha}\cdot$ Les plans de tous les cercles d'un système passent par la droite MN. Quant aux plans des cercles de l'autre système, qui sont perpendiculaires au plan XOY, ils passent par le point A_1 de l'axe OX, situé à une distance du centre égale à $\frac{b^2}{\alpha}\cdot$

L'arc parabolique sur lequel sont situés les centres des sphères qui ont la surface pour enveloppe est décrit sur la corde MN, et passe par le milieu de la portion de l'axe OX comprise entre le point A et cette corde. Le paramètre de cette parabole est égal à $\frac{c^2 - b^2}{\alpha}\cdot$