Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 87-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__87_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie élémentaire des convergents des fonctions d'une seule variable, avec ses applications à la détermination : 1° des lignes asymptotiques aux courbes représentées par ces fonctions; 2° de la vraie valeur des fonctions qui se présentent sous une forme indéterminée; suivie d'un examen critique des méthodes usitées pour la résolution de cette dernière question; par *Henri Fleury*, chef d'institution, licencié ès sciences mathématiques.

> « Je ne vois que des infinis de toutes parts. » (Pascal.)

Un *Avertissement* apprend que la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* a refusé d'insérer dans ce journal un article de M. Henri Fleury. L'auteur de l'article trouve que les motifs de ce refus sont entièrement dénués de bon sens; en outre, les objections des rédacteurs du journal lui semblent être en contradiction, et à cet égard sa conviction se fonde sur ce que : il n'entend rien aux objections de l'un des rédacteurs, tandis que dans les objections de l'autre il *voit* une *évidente* absurdité (*); l'*Avertissement* ne prévient d'aucune autre chose.

(*) Page xv : « je vois... une évidente absurdité ».

Il est sans doute à regretter que M. Fleury n'ait pas mieux apprécié la raison du refus dont il se plaint, et qu'il lui ait été absolument impossible de la voir dans l'inexactitude du raisonnement de son artiole. La rédaction des *Nouvelles Annales* n'en est pas responsable, car l'un des rédacteurs, M. Prouhet, a mis à lui montrer cette raison des soins qui n'ont eu pour limite que l'évidence de leur inutilité, comme le prouve suffisamment une correspondance que l'auteur de l'article a livrée au public.

Cette confiance inébranlable de l'auteur dans la rectitude de ses idées scientifiques, secondée peut-être par un désir peu réfléchi de publicité, l'a probablement empêché aussi de se rendre un compte exact de ce qu'il y a d'irrégulier à publier des lettres sans y être autorisé par celui qui les a écrites.

Des précédents de cette nature ne permettent guère d'espérer que l'on puisse parvenir à convaincre M. Fleury de l'erreur qui existe dans ses principes fondamentaux. Aussi, ce n'est pas précisément l'objet que je me propose en répondant à l'*Avertissement*. Mais l'auteur est licencié ès sciences mathématiques, et l'assurance avec laquelle il proclame l'exactitude de ses raisonnements pourrait égarer le jugement de quelques-uns de ceux qui n'ont pas encore fait des études aussi prolongées que les siennes : considéré sous ce point de vue, l'*Avertissement* me semble mériter qu'on s'en occupe.

Page IX, on lit :

« M. Prouhet, qui n'a pas le temps de mettre son ob-
» jection dans tout son jour (de la tirer au clair), veut
» bien prendre le temps de m'en faire une nouvelle ; et,
» parce que dans une expression que l'hypothèse $x = \infty$
» réduit à

$$\left(\frac{a - a'}{2}\right) x + \frac{b - b'}{2} - \left(\frac{a - a'}{2}\right) x,$$

» je supprime le premier et le dernier terme QUI SE DÉ-
» TRUISENT, il m'écrit : « Vous faites des calculs sur
» l'infini.... »

Ces lignes renferment une erreur qui a pris la forme d'une vérité toute simple : quand deux termes se détruisent, on peut les supprimer, rien n'est plus certain; seulement, les deux termes dont il s'agit ici ne se détruisent pas, généralement du moins, parce qu'ils ne proviennent que de l'hypothèse $x = \infty$, qui les rend infinis l'un et l'autre, et leur suppression revient à substituer o à $0 \times \infty$, ou, si l'on veut, à remplacer $\infty - \infty$ par o. En voici une démonstration détaillée.

Considérons l'expression

$$\frac{(a-a')x+(b-b')+\delta}{2(1+\varepsilon)} - \left(\frac{a-a'}{2}\right)x,$$

où δ et ε représentent des fonctions de x qui s'annulent pour $x = \infty$ (*). L'hypothèse $x = \infty$ réduit cette expression à

$$\left(\frac{a-a'}{2}\right)x + \frac{b-b'}{2} - \left(\frac{a-a'}{2}\right)x,$$

et si, comme l'affirme l'*Avertissement*, le premier et le troisième terme se détruisent, l'expression considérée est nécessairement réduite à $\frac{b-b'}{2}$ par l'hypothèse $x = \infty$: c'est ce qu'il faut bien se garder de croire.

(*) Cette expression comprend, comme cas particulier, la fonction

$$\frac{(a-a')x+(b-b')+\frac{c-c'}{x}+\frac{d-d'}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{d}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{a'}{x}+\frac{b'}{x^2}+\frac{c'}{x^3}+\frac{d'}{x^4}}} - \left(\frac{a-a'}{2}\right)x,$$

considérée dans l'*Avertissement*.

En effet, pour toute valeur finie de x, on a

$$\frac{(a-a')x+(b-b')+\delta}{2(1+\varepsilon)}-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$$
$$=\frac{(b-b')+\delta-\varepsilon(a-a')x}{2(1+\varepsilon)},$$

ou, en posant $\frac{-\varepsilon(a-a')}{1+\varepsilon}=\alpha$,

$$\frac{(a-a')x+(b-b')+\delta}{2(1+\varepsilon)}-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x=\frac{(b-b')+\delta}{2(1+\varepsilon)}+\frac{\alpha x}{2}.$$

Cette dernière égalité a lieu, quelque grande que soit la valeur attribuée à x; donc, si le premier membre est réduit à $\frac{b-b'}{2}$ par l'hypothèse $x=\infty$, il en doit être de même du second; or, le second membre se réduit seulement à $\frac{b-b'}{2}+\frac{\alpha x}{2}$, car le terme $\frac{\alpha x}{2}$ ne peut être supprimé puisque α ne devient nul que pour $x=\infty$. Par conséquent, la réduction des deux termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, dont le premier ne provient que de l'hypothèse $x=\infty$, n'est pas mieux fondée en principe que l'égalité $0\times\infty=0$ (*).

Lorsque x représente une variable dont la valeur croît indéfiniment, les deux termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$

(*) Prenons pour exemple l'expression $x-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$. L'hypothèse $x=\infty$ réduit cette expression à $x-x$. D'après l'*Avertissement*, les deux termes x, $-x$ se détruisent, donc l'hypothèse $x=\infty$ réduit à *zéro* l'expression considérée. Or, pour toute valeur finie de x, on a évidemment

$$x-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}};\quad \text{et, pour } x=\infty,\quad \frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1:$$

par conséquent la réduction des deux x, $-x$ conduit à l'égalité $1=0$.

se détruisant, quelque grande que soit la valeur *finie* de x, on peut dire qu'ils se détruisent encore à la limite $x = \infty$; mais ce n'est pas le cas d'une expression dont la réduction à la forme

$$\left(\frac{a-a'}{2}\right)x + \frac{b-b'}{2} - \left(\frac{a-a'}{2}\right)x$$

a seulement lieu pour $x = \infty$; et, supprimer alors les termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, c'est, comme le fait observer M. Prouhet, étendre à des expressions qui ne représentent aucune quantité finie les règles du calcul des quantités finies. Peu importe à l'auteur de l'*Avertissement* : il ne voit aucune différence entre ces deux cas, et c'est lui-même qui en prévient (page x) :

« Les deux termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$ se dé-
» truisent évidemment, quelque valeur, même infinie,
» qu'on suppose à x. Admettons qu'opérer cette réduc-
» tion, ce soit faire des calculs sur l'infini ; alors je fais, je
» l'avoue, des calculs sur l'infini, et je n'ai pas le mérite
» d'être le premier. Ouvrez le *Cours d'Analyse* de
» M. Duhamel, et vous pourrez lire à la page 13 (1847) :
« On parle souvent des quantités infinies ; on les
» soumet aux mêmes opérations que les quantités finies,
» et *il est très-important de ne pas se méprendre sur*
» *la manière dont ce langage doit être entendu.* »

C'est précisément en cela que M. Fleury s'est mépris, et sa méprise tient peut-être à ce qu'il a seulement eu égard à ces mots : « On parle souvent... » ; mais le passage du *Cours d'Analyse* qu'on a cité ne commence pas ainsi, et le commencement mérite bien d'être rapporté ; nous le rétablissons ici :

« Le mot *infini* est employé pour exprimer l'absence
» de limite, de borne quelconque : c'est ainsi que l'espace

» et le temps sont dits infinis. *Cette idée exclut évidem-*
» *ment celle de toute comparaison sous le rapport de la*
» *grandeur*. Néanmoins, pour abréger le discours, on
» parle souvent, etc. ».

On conçoit que ce commencement ne pouvait servir à justifier la réduction des quantités infinies désignées par les deux termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, à moins toutefois d'admettre que l'idée de réduire ces deux quantités *exclut évidemment celle* d'en comparer les grandeurs.

Au reste, le calcul précédemment indiqué (p. 89 et 90) démontre que cette réduction est illusoire, et tout raisonnement qui conduit à une conclusion contraire est, par cela même, un raisonnement erroné.

C'est pourquoi la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* a dû refuser d'insérer dans ce journal l'article de M. Fleury. Nous regrettons que l'auteur de l'article, en informant le public de ce refus, nous ait obligé d'en faire connaître le motif. G.