NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-J.-A. MATHIEU

Étude de géométrie comparée, avec applications aux sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 393-407

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__393_1>

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE, AVEC APPLICATIONS AUX SECTIONS CONIQUES;

Par M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie, Sous-Directeur de la fonderie de Toulouse.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — *Considérations générales et notions préliminaires.*

Une même idée se retrouve au fond des travaux les plus remarquables de notre époque, au fond de toutes ces belles recherches, dans lesquelles d'illustres savants ont tour à tour tiré si bon parti des méthodes projectives, des méthodes de déformation ou de transformation des figures, des lois de dualité ou des modes de conjugaison; cette idée, j'essayerai de la dégager et de la définir nettement en l'appelant l'idée féconde de la *Géométrie comparée*.

En restant, pour abréger, dans le domaine de la Géométrie plane, qu'on imagine que deux points, ou un point et une droite, ou deux droites, soient liés par une loi invariable permettant de trouver l'un des éléments quand l'autre est donné, on pourra faire de cette loi ou mode de conjugaison de deux éléments la base d'une méthode de Géométrie comparée. Il suffira, en effet, de considérer une ligne déterminée comme la directrice d'un point, ou comme l'enveloppe d'une droite, pour faire naître une seconde ligne dont les points ou les tangentes se déduiront des points ou des tangentes de la première par la loi de conjugaison établie.

Les méthodes de Géométrie comparée peuvent donc, comme les lois ou modes de conjugaison, varier à l'infini. Lorsque le mode de conjugaison appartient à la Géométrie de la règle et du compas, c'est-à-dire lorsqu'il se traduit en une construction réalisable avec ces instruments, la Géométrie comparée peut souvent fournir à la pratique des moyens commodes pour ramener le problème de la construction d'une ligne déterminée par certaines conditions à la construction d'une ligne conjuguée plus simple, de laquelle la première se déduit ensuite par la loi de conjugaison.

C'est ainsi que je ferai voir, dans la seconde Partie de cette Étude, qu'une conique peut, suivant certains modes simples de conjugaison, se traduisant en des constructions géométriques faciles, être considérée soit comme la conjuguée d'une droite, soit comme la conjuguée d'un point.

Je ne crains pas de dire qu'on est en droit d'attendre plus encore des ressources fécondes de la Géométrie comparée. Je pourrais montrer dans l'analyse transcendante de belles méthodes dont les points de départ appartiennent en propre à ce genre de Géométrie, auquel le Calcul intégral devra peut-être un jour les solutions dont sont susceptibles ses problèmes les plus épineux. Mais je n'examinerai pas ici ce sujet.

La valeur d'une méthode de Géométrie comparée dépend absolument du choix plus ou moins heureux de la loi de conjugaison. Assez généralement, la loi s'établit en faisant intervenir une figure fixe qu'on peut nommer *figure de référence.* Ainsi, pour ne citer qu'un exemple bien connu, dans la méthode des polaires réciproques, qui est une méthode de Géométrie comparée empruntant son nom à la propriété principale des lignes conjuguées qu'on y fait naître, la figure de référence est une conique, les éléments conjugués sont un point et une droite, la loi de conjugaison est établie par la condition que le point est le pôle de la droite relativement à la conique.

Ce Mémoire contiendra l'étude des méthodes de Géométrie comparée dans lesquelles j'emploie le triangle comme figure de référence et, comme lois ou modes de conjugaison de deux points, d'un point et d'une droite, ou de deux droites, certaines lois simples qui paraissent douées de conséquences heureuses, principalement dans les applications aux sections coniques.

Je serai naturellement conduit, par la nature de la figure de référence que j'emploie, à faire un certain usage du système de coordonnées trilitères ou trilinéaires dont nous devons, en France, la connaissance aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*Nouvelles Annales*, 1859, *Bulletin de Bibliographie*, p. 67).

Dans ce système de coordonnées, un point est déterminé par ses distances à trois droites quelconques, dont le triangle est nommé triangle de référence. La règle des signes peut s'énoncer très-simplement ainsi : la distance est positive ou négative selon que le point et le triangle de référence sont ou ne sont pas situés du même côté de la droite.

Il existe nécessairement une équation de condition entre les coordonnées (t, u, v) d'un point quelconque. Soient ABC le triangle de référence, S sa surface, R le rayon du cercle circonscrit; l'équation de condition peut s'écrire de l'une ou de l'autre de ces deux manières :

$$ta + ub + vc = 2S,$$

$$t \sin A + u \sin B + v \sin C = 2R \sin A \sin B \sin C.$$

Il sera bon de remarquer les équations suivantes, écrites dans ce système de coordonnées.

Équation d'une droite quelconque :

$$t\alpha + u\beta + v\gamma = 0;$$

l'équation

$$ta + ub + vc = 0$$

représente une droite située à l'infini.

Équation d'une conique circonscrite au triangle de référence :

$$\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{u} + \frac{\gamma}{v} = 0;$$

l'équation

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{u} + \frac{c}{v} = 0$$

représente le cercle circonscrit.

Équation d'une conique inscrite au triangle de référence :

$$t^2\alpha^2 + u^2\beta^2 + v^2\gamma^2 - 2tu\alpha\beta - 2tv\alpha\gamma - 2uv\beta\gamma = 0.$$

Pour établir les lois ou modes de conjugaison dont je ferai usage, j'aurai à me servir de deux genres de faisceaux de quatre droites : 1° le faisceau harmonique, bien connu; 2° un faisceau que je nommerai *faisceau d'inversion*, dont la définition sera donnée dans le paragraphe suivant, et qui, soit dit en passant, n'est pas, comme le faisceau harmonique, doué de la propriété projective.

§ II. — *Faisceau d'inversion.*

Je nommerai *faisceau d'inversion* un faisceau formé par deux systèmes de droites dont les bissectrices coïncident, et *droites inverses* deux rayons conjugués de ce faisceau. Lorsqu'on prend pour axes deux rayons conjugués, les deux autres ont des coefficients angulaires inverses; de là ces dénominations.

En Géométrie, les deux tangentes ménées d'un point à une section conique et les deux droites menées de ce point aux deux foyers forment un faisceau d'inversion. En Physique, deux rayons incidents en un même point d'une surface, et situés dans le plan normal à la surface en ce point, forment avec les rayons réfléchis un faisceau d'inversion dans lequel le rayon incident et le rayon réfléchi sont conjugués.

Pour abréger le discours, parlant d'une droite qui passe par le sommet d'un angle, j'appellerai, sans autre explication, *inverse* de cette droite le quatrième rayon du faisceau d'inversion déterminé par les côtés de l'angle, pris pour rayons conjugués, et par la droite donnée. Je dirai, ainsi, que la bissectrice d'un angle est sa propre inverse.

§ III. — *Mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire.*

Lorsque trois droites, issues des trois sommets d'un triangle, se coupent en un même point, il en est de même des trois droites inverses.

Les deux points ainsi conjugués seront nommés *points inverses.*

Le produit des distances de deux points inverses à l'un quelconque des trois côtés du triangle de référence est le même.

Soit le point (t', u', v'). Les droites de jonction de ce point aux trois sommets du triangle sont

$$tv' - vt' = 0, \quad uv' - vu' = 0, \quad tu' - ut' = 0.$$

Les inverses de ces trois droites, qui sont

$$tt' - vv' = 0, \quad uu' - vv' = 0, \quad tt' - uu' = 0,$$

se coupent en un même point; et si l'on représente ce point par (t'', u'', v''), on aura

$$t' t'' = u' u'' = v' v''.$$

Voici maintenant quelques propriétés des points inverses qu'il faut remarquer et dont on trouvera facilement les démonstrations.

Deux points inverses peuvent toujours être regardés comme les deux foyers d'une conique inscrite au triangle de référence.

La droite qui joint deux points et celle qui joint les deux inverses sont vues d'un sommet du triangle sous le même angle, ou sous des angles supplémentaires.

Les angles A' *et* A''*, sous lesquels un côté a du triangle de référence est vu de deux points inverses, satisfont toujours à l'une des quatre équations*

$$\text{tang}\,(A' \pm A'') \pm \text{tang}\,A = 0.$$

Il est à remarquer que le mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire se traduit en une construction géométrique très-facile de l'un des points quand l'autre est donné : on a simplement à construire deux fois le quatrième rayon d'un faisceau d'inversion, et trois fois si l'on veut une vérification.

§ IV. — *Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire directe ou inverse.*

La définition du pôle d'une droite relativement à un triangle peut se déduire de la théorie générale des polaires. (*Voyez* l'article déjà cité des *Nouvelles Annales de Mathématiques*).

Il me suffira du reste de dire que le *pôle trilinéaire* d'une droite peut être considéré comme le point d'intersection des quatrièmes rayons des faisceaux harmoniques respectivement déterminés aux trois sommets du triangle par les côtés de l'angle, pris pour rayons conjugués, et par la droite qui joint le sommet de cet angle au point d'intersection du côté opposé avec la droite donnée.

Cette loi de conjugaison entre un point et une droite se traduit en une construction géométrique facile de l'un des éléments quand l'autre est donné. Elle n'exige même que l'emploi de la règle.

Si l'on nomme *pôle inverse* d'une droite l'inverse du pôle de cette droite, un second mode de conjugaison d'un point et d'une droite peut être considéré. Nous avons ainsi les deux modes de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire directe ou inverse.

Soit la droite

$$t\alpha + u\beta + v\gamma = 0.$$

Le pôle (t', u', v') de cette droite est le point d'intersection des trois droites

$$t\alpha - v\gamma = 0, \quad u\beta - v\gamma = 0, \quad t\alpha - u\beta = 0.$$

L'équation de la droite peut alors recevoir la forme

$$\frac{t}{t'} + \frac{u}{u'} + \frac{v}{v'} = 0,$$

ou, en fonction des coordonnées de l'inverse de son pôle,

$$tt'' + uu'' + vv'' = 0.$$

Ce sera de la polarité trilinéaire qu'il sera toujours question dans cette Étude. Je préviens donc, une fois pour toutes, que lorsque je parlerai, sans autre explication, de pôles et de polaires, il faudra toujours sous-entendre : relativement au triangle de référence.

§ V. — *Mode de conjugaison de deux droites par inversion trilinéaire des pôles.*

Lorsque trois droites, issues de trois sommets d'un triangle, coupent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite, il en est de même des trois droites inverses.

Les deux droites ainsi conjuguées ont les pôles inverses. Je nommerai ces droites *droites de pôles inverses*.

Soit l'équation d'une droite, en fonction des coordonnées de son pôle

$$\frac{t}{t'} + \frac{u}{u'} + \frac{v}{v'} = 0.$$

Les droites qui joignent les sommets du triangle aux points d'intersection de cette droite avec les côtés opposés sont

$$tv' + vt' = 0, \quad uv' + vu' = 0, \quad tu' + ut' = 0.$$

Les inverses de ces droites, qui sont

$$tt' + vv' = 0, \quad uu' + vv' = 0, \quad tt' + uu' = 0,$$

coupent les côtés du triangle sur la droite

$$tt' + uu' + vv' = 0,$$

qui est la droite de pòles inverses de

$$\frac{t}{t'} + \frac{u}{u'} + \frac{v}{v'} = 0.$$

Le mode de conjugaison de deux droites, par inversion trilinéaire des pôles, se traduit encore en une construction facile de l'une des droites quand l'autre est donnée. La droite cherchée peut s'obtenir, soit directement par deux faisceaux d'inversion, ou trois si l'on veut une vérification; soit en inversant le pôle de la droite donnée et cherchant la polaire de ce point.

§ VI. — *Remarques sur les modes de conjugaison précédents.*

Je crois bon de présenter le résumé des relations analytiques qui définissent les quatre modes de conjugaison précédemment examinés. Je donne ces relations : 1° dans le cas où l'on se sert de coordonnées trilinéaires ; 2° dans celui où, se servant du système ordinaire de coordonnées, on prend pour axes deux côtés CA, CB du triangle de référence.

1° Soient : $(t'\,u'\,v')$, $(t''\,u''\,v'')$ deux points inverses ; $t\alpha' + u\beta' + v\gamma' = 0$, $t\alpha'' + u\beta'' + v\gamma'' = 0$, les polaires de ces points, qui seront deux droites de pôles inverses ; on aura :

Mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire :

$$t't'' - v'v'' = 0,$$
$$u'u'' - v'v'' = 0;$$

Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire directe :

$$t'\alpha' - v'\gamma' = 0,$$
$$u'\beta' - v'\gamma' = 0;$$

Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire inverse :

$$t''\gamma' - v''\alpha' = 0,$$
$$u''\gamma' - v''\beta' = 0;$$

Mode de conjugaison de deux droites par inversion trilinéaire des pôles :

$$\alpha'\alpha'' - \gamma'\gamma'' = 0,$$
$$\beta'\beta'' - \gamma'\gamma'' = 0.$$

2° Soient : $(x'y')$, $(x''y'')$ deux points inverses; $p'y + q'x - p'q' = 0$, $p''y + q''x - p''q'' = 0$, les polaires de ces points, qui seront deux droites de pôles inverses; on aura :

Mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire :

$$x'' = \frac{y'(ay' + bx' - ab)}{y'^2 + x'^2 + 2x'y'\cos\theta - ax' - by'},$$
$$y'' = \frac{x'(ay' + bx' - ab)}{y'^2 + x'^2 + 2x'y'\cos\theta - ax' - by'}$$

(équations douées de réciprocité en x', y') ;

Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire directe :

$$p'(ay' + 2bx' - ab) - abx' = 0,$$
$$q'(2ay' + bx' - ab) - aby' = 0;$$

Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire inverse :

$$p'[x''(b^2 + c^2) + y''ab - ab^2] - ab(ay'' + bx'' - ab) = 0,$$
$$q'[y''(a^2 + c^2) + x''ab - a^2b] - ab(ay'' + bx'' - ab) = 0;$$

Mode de conjugaison de deux droites par inversion trilinéaire des pôles :

$$p'p''(c^2 - b^2) + (p' + p'')\,ab^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$q'q''(c^2 - a^2) + (q' + q'')\,a^2b - a^2b^2 = 0.$$

Il faut maintenant faire plusieurs observations qui ont leur utilité et dont on trouvera sans peine les démonstrations.

Un point d'un côté du triangle de référence a pour inverse le sommet opposé; et réciproquement un sommet a pour inverse un point indéterminé du côté opposé.

Un point de la circonférence circonscrite a son inverse situé à l'infini; et réciproquement trois droites parallèles, issues des trois sommets du triangle, ont pour inverses trois droites qui se coupent sur la circonférence.

Comme positions relatives, deux points inverses sont toujours : ou 1° *tous deux dans l'intérieur du triangle;* ou 2° *l'un dans l'angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle et l'autre dans le segment du cercle circonscrit qui a pour corde le côté opposé;* ou 3° *tous deux extérieurs au cercle circonscrit et situés dans le même angle du triangle.*

Le centre du cercle circonscrit et le point de concours des trois hauteurs sont deux points inverses.

Le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle est son propre inverse.

Le centre de gravité a pour inverse le point de concours des droites qui joignent un sommet au point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit menées par les deux autres sommets.

Un point d'un côté du triangle a pour polaire ce côté lui-même; et réciproquement un côté a pour pôle un point indéterminé de ce côté.

Une droite passant par un sommet a pour pôle ce *sommet; et réciproquement un sommet a pour polaire une droite indéterminée passant par ce sommet.*

Le centre de gravité du triangle a sa polaire située à l'infini; et réciproquement, quand une droite s'éloigne à l'infini, son pôle vient au centre de gravité du triangle.

Lorsqu'un point s'éloigne à l'infini, sa polaire devient tangente à l'ellipse inscrite au triangle par les points milieux des côtés; réciproquement une droite tangente à l'ellipse ainsi déterminée a son pôle situé à l'infini.

L'inverse du centre de gravité a pour polaire la droite qui passe par les points d'intersection de chaque côté avec la tangente au cercle circonscrit menée par le sommet opposé.

Une droite passant par un sommet a pour droite de pôles inverses le côté opposé; et réciproquement un côté a pour droite de pôles inverses une droite indéterminée passant par le sommet opposé.

La polaire de l'inverse du centre de gravité, qui est la droite indiquée plus haut, a sa droite de pôles inverses située à l'infini.

§ VII. — *Méthodes de Géométrie comparée déduites des modes de conjugaison précédents.*

Les modes de conjugaison précédents conduisent tout naturellement à étudier dans leurs propriétés corrélatives, ou à comparer : 1° deux *lignes inverses*, c'est-à-dire conjuguées par la condition que les points de l'une soient les inverses des points de l'autre, ce qui entraîne réciprocité; 2° deux lignes conjuguées par la condition que l'une serve de directrice au pôle de la tangente de l'autre, ce qui, la figure de référence étant un triangle, n'entraîne nullement réciprocité comme cela a lieu quand la figure de référence est une conique; 3° deux lignes conjuguées par la condition que l'une serve de directrice au pôle inverse de la tangente de l'autre, ce qui entraîne réciprocité, on le verra dans la seconde Partie de cette Étude; 4° deux lignes conjuguées par la condition que les tangentes de l'une soient les droites de pôles inverses des tangentes de l'autre, ce qui entraîne réciprocité.

Mon intention n'est pas de pousser bien loin dans ce Mémoire l'examen des propriétés générales des lignes conjuguées suivant l'un ou l'autre des modes précédents. En effet, toutes particulières et restreintes que puissent paraître, dans le domaine illimité que j'ai assigné à la Géométrie comparée, les méthodes que je mets en jeu, elles ouvriraient encore un champ indéfini aux recherches; et je n'ai guère en vue, pour le moment, que leur application aux sections coniques.

Dans tous les cas, le choix du triangle de référence, qui est resté jusqu'ici tout à fait arbitraire, a une influence radicale sur la nature de la conjuguée d'une ligne donnée. Quelques principes généraux montreront clairement cette influence et permettront de prévoir d'importants théorèmes dans les applications aux sections coniques, théorèmes qui seront alors démontrés directement et développés avec l'intérêt qu'ils me paraissent mériter.

Quant aux considérations sur lesquelles reposent les principes que je vais poser, elles se déduisent de données contenues dans le paragraphe précédent; mais je les supprime pour ne pas allonger davantage cette première Partie de mon travail.

Soient s et σ deux lignes inverses de degrés m et μ. Soient A_s, B_s, C_s et A_σ, B_σ, C_σ les nombres qui indiquent l'ordre de multiplicité de chaque sommet du triangle de référence, considéré comme un point multiple de chaque ligne; l'ordre de multiplicité étant o lorsque la ligne ne passe pas par le sommet.

Soient t et τ les enveloppes des polaires des points des deux lignes inverses précédentes, et supposons que p et π représentent les nombres de tangentes qu'on peut généralement mener aux deux lignes t et τ par un point extérieur. Soient a_t, b_t, c_t et a_τ, b_τ, c_τ les nombres indiquant l'ordre de multiplicité de chaque côté du triangle de référence, considéré comme tangente multiple à chaque ligne; l'ordre de multiplicité étant 0 lorsque la ligne n'a aucun point de contact sur le côté.

On aura les relations suivantes, selon les modes de conjugaison.

1^er^ Mode. — *s et σ lignes conjuguées par inversion des pôles.*

$$\begin{gathered} m+\mu = A_s + B_s + C_s + A_\sigma + B_\sigma + C_\sigma, \\ m - A_s = \mu - A_\sigma, \\ m - B_s = \mu - B_\sigma, \\ m - C_s = \mu - C_\sigma. \end{gathered}$$

2^e^ Mode. — *s et t lignes conjuguées par polarité directe.*

$$\begin{gathered} m+p = A_s + B_s + C_s + a_t + b_t + c_t, \\ m - A_s = p - a_t, \\ m - B_s = p - b_t, \\ m - C_s = p - c_t. \end{gathered}$$

3^e^ Mode. — *s et τ conjuguées par polarité inverse.*

$$\begin{gathered} m = \pi, \\ m - A_s = \pi - a_\tau, \\ m - B_s = \pi - b_\tau, \\ m - C_s = \pi - c_\tau. \end{gathered}$$

4^e^ Mode. — *σ et τ lignes conjuguées par inversion des pôles de leurs tangentes.*

$$\begin{gathered} p+\pi = a_t + b_t + c_t + a_\tau + b_\tau + c_\tau, \\ p - a_t = \pi - a_\tau, \\ p - b_t = \pi - b_\tau, \\ p - c_t = \pi - c_\tau. \end{gathered}$$

Je donnerai quelques exemples.

En faisant dans ces formules $m = 2$, $A_s = 1$, $B_s = 1$, $C_s = 1$, on trouve ces théorèmes :

L'inverse d'une conique circonscrite est une ligne droite; les polaires des points de la conique passent par un point fixe; les droites de pôles inverses de ces polaires ont pour enveloppe une conique inscrite.

Pour $p = 2$, $a_t = 1$, $b_t = 1$, $c_t = 1$, on trouve ces théorèmes :

Les pôles des tangentes d'une conique inscrite sont sur une ligne droite; les inverses de ces pôles sont sur une conique circonscrite; les droites de pôles inverses des tangentes de la conique inscrite passent par un point fixe.

On trouverait : qu'une conique qui ne passe par aucun sommet a pour inverse une ligne du quatrième degré ayant un point double en chaque sommet; qu'une ligne du troisième degré simplement circonscrite a pour inverse une ligne du troisième degré simplement circonscrite; qu'une ligne du troisième degré circonscrite et ayant un point double en un sommet a pour inverse une conique passant par ce sommet, etc., etc.

La ligne du troisième degré qui est le lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites, ligne dont l'équation pourrait s'écrire immédiatement, au moyen des formules du § VI, jouit de cette propriété d'être sa propre inverse relativement à l'un quelconque des quatre triangles déterminés par les quatre droites. On pourrait déduire de cette propriété plusieurs conséquences auxquelles je ne m'arrêterai pas.

(*La suite prochainement.*)