Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 357-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__357_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE;

PAR M. PAINVIN.

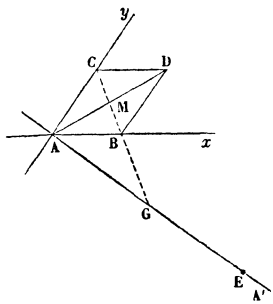
Voici l'énoncé :

On donne trois points fixes A, B, C, *et une droite fixe* AA′ *passant par le point* A : *trouver le lieu des points de contact des droites parallèles à* AA′ *et tangentes aux coniques passant par les trois points* A, B, C, *et touchant la droite* AA′.

Ce lieu est une conique ; on demande le lieu des foyers de ces coniques lorsqu'on fait varier la position de la droite AA′.

I.

Je prends pour axes les droites AB et AC et je désigne par a et b les longueurs AB et AC ; la conique, passant



par les deux points B, C et tangente en A à la droite AA′ (ou $y - mx = 0$), peut être considérée comme circonscrite à un quadrilatère dont les côtés opposés seraient AB et AC, BC et AA′ ; l'équation générale des coniques satisfaisant aux conditions imposées est donc

$$(1) \qquad \lambda xy + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)(y - mx) = f(x, y) = 0.$$

Considérons une tangente parallèle à la droite AA′; soit

$$y = mx + \mu$$

l'équation de cette parallèle ; si $(x_1\ y_1)$ sont les coordonnées du point de contact avec les coniques (1), l'équation de la tangente en ce point sera

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + f'_{z_1} = 0, \quad f(x_1, y_1) = 0.$$

Identifions les équations de ces deux droites ; on a

$$(2)\qquad \frac{f'_{x_1}}{m} = \frac{f'_{y_1}}{-1} = \frac{f'_{z_1}}{\mu};$$

au lieu de la condition $f(x_1, y_1) = 0$, je prendrai ici la relation équivalente

$$(3)\qquad y_1 = mx_1 + \mu.$$

L'équation du lieu des points de contact s'obtiendra en éliminant λ et μ entre les relations (2) et (3). En effectuant les différentiations et en supprimant les indices, les équations deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda y + \frac{1}{a}(y - mx) - m\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)}{m} \\ &= \frac{\lambda x + \frac{1}{b}(y - mx) + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)}{-1} = \frac{-(y - mx)}{\mu}, \\ &y - mx = \mu. \end{aligned}\right.$$

En substituant pour μ la valeur donnée par la dernière relation, et en laissant de côté la solution

$$y - mx = 0,$$

on obtient les deux équations

$$\frac{\lambda y + \frac{1}{a}(y - mx) - m\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)}{m}$$
$$= \frac{\lambda x + \frac{1}{b}(y - mx) + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)}{-1} = -1.$$

L'élimination de λ s'effectue immédiatement, et on trouve pour *l'équation du lieu des points de contact des tangentes parallèles à la droite* AA′ :

$$(S)\ (I)\qquad \frac{mx^2}{a}+\frac{y^2}{b}-y-mx=0.$$

Cette équation donne des ellipses et des hyperboles; le cercle ne peut se présenter que dans le cas très-particulier où l'angle CAB est droit.

Les coniques S sont, quel que soit m, circonscrites au parallélogramme fixe ABCD; la tangente en A est conjuguée harmonique, par rapport aux axes Ax et Ay, de la droite ou tangente AA′.

Les axes Ax et Ay sont constamment parallèles à un système de diamètres conjugués.

Enfin le centre des coniques S est fixe, quel que soit m, et coïncide avec le centre du parallélogramme ABCD.

L'équation des coniques (S) rapportées à leur centre est

$$(S)\ (II)\qquad \frac{mx^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{ma+b}{4}=0.$$

II.

Pour trouver le lieu des foyers des coniques S, je prendrai pour origine le centre fixe de ces coniques et je conserverai les axes parallèles aux droites Ax et Ay ; l'équation de la courbe est alors

$$(S)\ (1)\qquad \frac{mx^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{ma+b}{4}=F(x,y)=0.$$

Je rappelle que le foyer d'une conique peut être *défini analytiquement :* le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique.

Pour appliquer cette définition, je prends d'abord l'équation quadratique des tangentes menées d'un point à la conique ; j'exprime ensuite que cette équation représente un cercle, et le point considéré sera évidemment le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique : c'est-à-dire un foyer.

Soient (α, β, γ) les coordonnées homogènes d'un foyer : l'équation quadratique des tangentes menées de ce point à la courbe (1) est

$$4\,F(\alpha, \beta, \gamma)\,F(x, y, z) - [\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z]^2 = 0.$$

En ayant égard à la définition (1) de la fonction F, et en faisant $\gamma = 1$, $z = 1$, après les différentiations, cette équation devient

$$\left(\frac{m\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} - \frac{ma+b}{4}\right)\left(\frac{mx^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{ma+b}{4}\right) - \left[\frac{m\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} - \frac{ma+b}{4}\right]^2 = 0.$$

Nous exprimerons que cette équation représente un cercle en écrivant que les rapports du coefficient du rectangle à chacun des coefficients des carrés sont égaux au double du cosinus de l'angle des axes ; de sorte que, θ étant l'angle des axes, on a les relations

$$-\frac{m\alpha\beta}{ab} = \cos\theta\left[\frac{m}{a}\left(\frac{m\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} - \frac{ma+b}{4}\right) - \frac{m^2\alpha^2}{a^2}\right],$$

$$-\frac{m\alpha\beta}{ab} = \cos\theta\left[\frac{1}{b}\left(\frac{m\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} - \frac{ma+b}{4}\right) - \frac{\beta^2}{b^2}\right];$$

l'équation du lieu des foyers s'obtiendra en éliminant m entre ces deux équations.

En remplaçant α, β par x, y, et en effectuant quelques simplifications visibles, les deux équations précédentes peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} -xy &= \cos\theta\left[y^2 - \frac{b^2}{4} - m\frac{ab}{4}\right], \\ -mxy &= \cos\theta\left[m\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{ab}{4}\right]; \end{aligned}\right.$$

l'élimination de m conduit au résultat cherché, et l'on trouve, après quelques transformations fort simples,

$$(2) \qquad xy(y\cos\theta + x)(x\cos\theta + y) - \frac{\cos^2\theta}{4}\left[a^2y^2 + \frac{a^2+b^2}{\cos\theta}xy + b^2x^2\right] = 0.$$

Le lieu des foyers est donc une courbe du quatrième ordre, laquelle a pour asymptotes les quatre droites

$$x = 0, \quad y = 0,$$
$$y\cos\theta + x = 0, \quad x\cos\theta + y = 0;$$

les deux dernières sont respectivement perpendiculaires aux axes. L'origine est centre de la courbe, et, en même temps, un point double ; les deux tangentes sont toujours réelles ; les tangentes au point double sont des tangentes d'inflexion.

Lorsque $\theta = 90$ degrés, l'équation (2) se réduit à

$$x^2y^2 = 0;$$

ce résultat est immédiatement visible, d'après les remarques faites sur les coniques S.

La construction de la courbe (2) n'offre aucune difficulté ; il suffit de remarquer que l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(3) \quad xy(y\cos\theta + x)(x\cos\theta + y) - \frac{a^2\cos^2\theta}{4}(y + hx)(y + kx) = 0,$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} c^4 &= a^4 + b^4 - 2a^2b^2\cos 2\theta, \\ h &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2\cos\theta}, \\ k &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2a^2\cos\theta}. \end{aligned}\right.$$

h et k sont des quantités positives, si $\theta < 90$ degrés; elles sont négatives si $\theta > 90$ degrés.

Si, par exemple, nous supposons $\theta < 90$ degrés, il est facile de vérifier qu'on a toujours

$$h < \cos\theta < \frac{1}{\cos\theta} < k.$$

Si l'on suppose $\theta > 90$ degrés, on peut poser

$$\theta = 180^\circ - \theta_1, \quad \text{où} \quad \theta_1 < 90^\circ;$$

l'équation de la courbe devient

$$xy(x - y\cos\theta_1)(y - x\cos\theta_1) - \frac{a^2\cos^2\theta_1}{4}(y - hx)(y - kx) = 0,$$

et l'on a encore les inégalités

$$h < \cos\theta_1 < \frac{1}{\cos\theta_1} < k.$$

On voit que, quelles que soient les valeurs relatives de a, b et θ, la forme essentielle de la courbe reste la même.

Note du rédacteur. — La première des deux questions proposées pour l'admission à l'École Normale, ou, si l'on veut, la première partie de la question proposée, se résout, comme on vient de le voir, au moyen d'un calcul qui est simple. Pour en trouver la solution sans aucun calcul, il suffit de se rappeler que le lieu géométrique du centre d'une conique circonscrite à un quadrilatère donné est une courbe du second degré qui passe par les milieux des côtés et des diagonales de ce quadrilatère, et par les points d'intersection des côtés opposés ; car il résulte immédiatement de cette proposition, que le lieu du point de contact de la tangente parallèle à AA′ (p. 358), menée à une conique passant par les points B, C, et tangente à AA′ au point A, est une autre conique circonscrite au parallélogramme ABCD, et dont un cinquième point E s'obtient en prenant sur la droite donnée AA′ une distance AE double de la distance de A au point de rencontre G des droites AA′, BC. Les tangentes menées à cette dernière conique, aux extrémités B, C de son diamètre BC, sont parallèles à la corde AE qui est divisée en deux parties égales par ce diamètre; il est facile d'en conclure que la tangente au point A est conjuguée harmonique de AA′, par rapport aux droites AB, AC.

La seconde partie de la question proposée, relative au lieu des foyers des coniques circonscrites à un parallélogramme donné, ne se résout pas avec la même facilité, elle exige quelques calculs.

Le savant professeur à qui l'on doit la solution donnée (p. 360 et suiv.) a trouvé l'équation du lieu géométrique des foyers, par des calculs au sujet desquels il « rappelle que le foyer d'une conique peut être *défini analytiquement :* le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique (*). » Comme cette définition ne se trouve encore dans aucun ouvrage élémentaire écrit en français, il se peut qu'elle ne soit pas connue de tous les candidats aux Écoles Normale et Polytechnique. C'est ce qui me détermine à indiquer un autre moyen d'obtenir l'équation du lieu cherché, sans qu'il soit nécessaire de

(*) En des points imaginaires situés sur la directrice correspondante au foyer.

savoir qu'un foyer est le centre d'une circonférence nulle, doublement tangente, etc.

Pour plus de précision, je suppose que la conique circonscrite au parallélogramme ABCD (p. 358) soit une ellipse ; je désigne par $2a$ son grand axe, et par F, F′ ses foyers. De sorte que

$$AF + AF' = 2a$$

ou, parce que $AF' = DF$,

$$AF + DF = 2a.$$

De même,

$$BF + CF = 2a;$$

donc

$$AF - BF = CF - DF.$$

Cette dernière égalité montre que le point F appartient à la fois à deux hyperboles ayant respectivement leurs foyers aux points A, B et C, D, et dont les axes transverses ont la même valeur. En outre, les droites AB, CD sont égales et parallèles ; donc ces hyperboles sont égales et semblablement placées.

Actuellement, je prends pour axe des x une parallèle aux droites AB, CD, menée par le centre M de la conique circonscrite au parallélogramme ABCD ; et pour axe des y une perpendiculaire élevée à l'axe des x au point M. Puis, je nomme α, β les coordonnées du milieu de CD ; $2a$, $2b$, les axes d'une hyperbole ayant ses foyers en C et D ; et $2c$ la droite CD. Les équations des deux hyperboles égales seront

(1) $$a^2(y-\beta)^2 - b^2(x-\alpha)^2 = -a^2b^2$$

(2) $$a^2(y+\beta)^2 - b^2(x+\alpha)^2 = -a^2b^2,$$

et, de plus, on aura

(3) $$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pour déterminer l'équation du lieu des foyers F, il faut éliminer a^2, b^2, entre les relations (1), (2), (3). Or, c'est là une élimination bien facile à effectuer, car la soustraction des équations (1), (2), donne immédiatement

$$(4) \qquad a^2\beta y - b^2\alpha x = 0;$$

et, des équations (3) et (4), on tire, par un calcul des plus simples,

$$a^2 = \frac{c^2\alpha x}{\alpha x + \beta y}, \quad b^2 = \frac{c^2\beta y}{\alpha x + \beta y}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer a^2, b^2, par ces valeurs dans l'équation (1); il en résulte successivement

$$\frac{\alpha x(y-\beta)^2 - \beta y(x-\alpha)^2}{\alpha x + \beta y} = -\frac{c^2\alpha\beta xy}{(\alpha x + \beta y)^2};$$

$$\frac{(xy-\alpha\beta)(\alpha y - \beta x)}{\alpha x + \beta y} = -\frac{c^2\alpha\beta xy}{(\alpha x + \beta y)^2};$$

$$(5) \qquad (xy-\alpha\beta)(\alpha y - \beta x)(\alpha x + \beta y) = -c^2\alpha\beta xy,$$

ce qui est l'équation cherchée.

Quand l'angle BAC est droit, $\alpha = 0$, et l'équation (5) se réduit à $(xy)^2 = 0$.

Elle représente alors le système de deux droites menées du point M, parallèlement aux droites AB, AC. Cela doit être en effet, puisque les axes de toute conique circonscrite à un rectangle sont parallèles à ses côtés, et que les foyers d'une conique appartiennent nécessairement à l'un de ses axes.

Dans le cas général où l'angle A n'est pas droit, on rendra plus facile la construction de la courbe que l'équation (5) représente, en la rapportant à des coordonnées polaires, au moyen des formules

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega.$$

Afin d'obtenir sous sa forme la plus simple l'équation résultant de ce changement de coordonnées, nous remarquerons qu'en désignant par $2b$ le côté AC du parallélogramme ABCD, les coordonnées rectilignes α, β, du milieu de CD, ont pour valeurs

$$b\cos A, \quad b\sin A.$$

En remplaçant, dans l'équation (5), x, y α, β par

$$\rho\cos\omega, \quad \rho\sin\omega, \quad b\cos A, \quad b\sin A,$$

et ayant égard aux formules

$$\sin\omega\cos\omega = \frac{1}{2}\sin 2\omega, \quad \sin A\cos A = \frac{1}{2}\sin 2A,$$

$$(\sin\omega\cos A - \sin A\cos\omega)(\cos\omega\cos A + \sin A\cos\omega)$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2(\omega - A),$$

on trouve

$$(\rho^2\sin 2\omega - b^2\sin 2A).\sin 2(\omega - A) = -c^2\sin 2A.\sin 2\omega;$$

d'où

$$(6) \qquad \rho^2 = \sin 2A\left(\frac{b^2}{\sin 2\omega} - \frac{c^2}{\sin 2(\omega - A)}\right).$$

G.