NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LIGNIÈRES
CHARLES DE TRENQUELLÉON

Méthode élémentaire pour trouver l'équation de la développée de l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 85-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__85_1>

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE POUR TROUVER L'ÉQUATION DE LA DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE;

PAR MM. LIGNIÈRES ET CHARLES DE TRENQUELLÉON.

Lieu des points d'où l'on ne peut mener que trois normales à l'ellipse.

I^re Méthode. — Les pieds des normales menées par le point (α, β) sont donnés par l'intersection de l'ellipse

$$(1)\qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

et de l'hyperbole

$$(2)\qquad \beta - y = \frac{a^2y}{b^2x}(\alpha - x).$$

Les lignes du second degré passant par les points d'intersection des courbes (1) et (2) ont pour équation générale

$$a^2y^2 + \lambda c^2xy + b^2x^2 - \lambda a^2\alpha y + \lambda b^2 6 x - a^2 b^2 = 0;$$

cette équation représentera deux droites, si l'on a

$$c^2\alpha 6 \lambda^3 + (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 - c^4)\lambda^2 + 4a^2b^2 = 0,$$

ou

$$4a^2b^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 + (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 - c^4)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + c^2\alpha 6 = 0,$$

et à chaque système de deux droites correspond une valeur réelle de λ.

S'il n'y a que trois normales, les courbes (1) et (2) n'ont que trois points communs, et il n'y a que deux systèmes de droites; et, par suite, l'équation en λ, ainsi que l'équation en $\frac{1}{\lambda}$, ont deux racines égales; on a donc

$$(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 - c^4)^3 + 27 . a^2b^2c^4\alpha^2 6^2 = 0,$$

d'où

(3) $$a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + 3(a^2b^2\alpha^2 6^2)^{\frac{1}{3}}(c^4)^{\frac{1}{3}} = c^4;$$

et par suite

(4) $$(a^2\alpha^2)^{\frac{1}{3}} + (b^2 6^2)^{\frac{1}{3}} = (c^4)^{\frac{1}{3}} \text{ (*)},$$

équation qu'on peut écrire ainsi

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b6}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

ce qui est l'équation connue de la développée de l'ellipse.

IIe Méthode. — Je prends l'équation de la normale à l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, en fonction du coeffi-

(*) En valeurs réelles de α et 6 les équations (3) et (4) admettent les mêmes solutions. G.

cient angulaire

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(1) \qquad (y - mx)^2 (a^2 + b^2 m^2) - c^4 m^2 = 0.$$

En général, l'équation (1) donne pour m quatre valeurs : elle n'aura que trois racines distinctes, lorsqu'elle aura une racine commune avec l'équation formée en égalant à o la dérivée de son premier membre par rapport à m; cette équation dérivée est

$$(2) \quad -x(y - mx)(a^2 + b^2 m^2) + (y - mx)^2 b^2 m - c^4 m = 0.$$

Les équations (1) et (2) doivent avoir une racine commune. Multiplions l'équation (1) par x et l'équation (2) par $(y - mx)$ et ajoutons, il vient

$$(y - mx)^3 = \frac{c^4 y}{b^2};$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{y - \sqrt[3]{\frac{c^4 y}{b^2}}}{x}.$$

Si je change, dans cette valeur de m, x en y, y en x, a en b et b en a, j'aurai la valeur de $\frac{1}{m}$ (*); donc

$$\frac{1}{m} = \frac{x - \sqrt[3]{\frac{c^4 x}{a^2}}}{y}.$$

Multipliant ces deux dernières équations membre à

(*) Parce que l'équation (1) conserve les mêmes solutions lorsqu'on y change x en y, y en x, a en b, b en a, et m en $\frac{1}{m}$. G.

membre, il vient

$$y\sqrt[3]{\frac{c^4x}{a^2}}+x\sqrt[3]{\frac{c^4y}{b^2}}=\sqrt[3]{\frac{c^8xy}{a^2b^2}},$$

ou bien, en divisant les deux membres par $\sqrt[3]{\frac{c^8xy}{a^2b^2}}$:

$$\left(\frac{x}{\frac{c^2}{a}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{\frac{c^2}{b}}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

C'est l'équation connue de la développée de l'ellipse.