

M. L. P.

**Question proposée en composition pour
l'admission à l'École normale (1862)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 7-8

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_7_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**QUESTION PROPOSÉE EN COMPOSITION POUR L'ADMISSION
À L'ÉCOLE NORMALE (1862);**

SOLUTION DE M. L. P,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Par les extrémités A, B d'une corde AB d'une longueur constante et inscrite dans un cercle donné O, on mène des droites AM, BM respectivement parallèles à deux droites fixes; trouver le lieu de l'intersection M des deux droites AM, BM.

Prenons pour axes des coordonnées OX, OY des parallèles aux directions fixes, menées par le centre O du cercle. Soient θ l'angle YOX des axes; θ_1 l'angle constant BOA; α l'angle variable AOX; P et Q les points où les droites BM, AM prolongées coupent les axes OX, OY; x, y les coordonnées MQ, MP du point M, et r le rayon du cercle.

Les triangles OAQ, BOP donnent

$$y = \frac{r}{\sin \theta} \sin \alpha, \quad x = \frac{r}{\sin \theta} \sin (\theta - \theta_1 - \alpha).$$

De ces deux équations, on tire

$$\sin \alpha = \frac{y \cdot \sin \theta}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{\sin \theta}{r \cdot \sin (\theta - \theta_1)} [x + y \cos (\theta - \theta_1)];$$

et en substituant dans $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, on obtient pour l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos (\theta - \theta_1) = \frac{r^2 \sin^2 (\theta - \theta_1)}{\sin^2 \theta}.$$

On voit que le lieu est une ellipse rapportée à son centre. Si on avait $\theta = \theta_1$, le lieu serait la droite $(x + y) = 0$.

Ce cas particulier écarté, il est facile de voir que les axes de l'ellipse sont dirigés suivant les bissectrices des angles des axes; car l'équation obtenue reste la même, lorsqu'on change x en y et y en x , ou bien encore x en $-y$, et $-y$ en x .

On aura les longueurs des axes, en déterminant les points de rencontre de la courbe et des bissectrices des angles des coordonnées. On trouve, pour les longueurs des demi-axes,

$$\frac{r \sin \left(\frac{\theta - \theta_1}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \frac{r \cos \left(\frac{\theta - \theta_1}{2} \right)}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

L'ellipse est ainsi déterminée de grandeur et de position.
