NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. L. P.

Question proposée en composition pour l'admission à l'École normale (1862)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 7-8

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__7_1>

QUESTION PROPOSÉE EN COMPOSITION POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (1862);

SOLUTION DE M. L. P,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Par les extrémités A, B *d'une corde* AB *d'une longueur constante et inscrite dans un cercle donné* O, *on mène des droites* AM, BM *respectivement parallèles à deux droites fixes; trouver le lieu de l'intersection* M *des deux droites* AM, BM.

Prenons pour axes des coordonnées OX, OY des parallèles aux directions fixes, menées par le centre O du cercle. Soient θ l'angle YOX des axes; θ_1 l'angle constant BOA; α l'angle variable AOX; P et Q les points où les droites BM, AM prolongées coupent les axes OX, OY; x, y les coordonnées MQ, MP du point M, et r le rayon du cercle.

Les triangles OAQ, BOP donnent

$$y = \frac{r}{\sin\theta}\sin\alpha, \quad x = \frac{r}{\sin\theta}\sin(\theta - \theta_1 - \alpha).$$

De ces deux équations, on tire

$$\sin\alpha = \frac{y.\sin\theta}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{\sin\theta}{r.\sin(\theta - \theta_1)}\left[x + y\cos(\theta - \theta_1)\right];$$

et en substituant dans $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, on obtient pour l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos(\theta - \theta_1) = \frac{r^2\sin^2(\theta - \theta_1)}{\sin^2\theta}.$$

On voit que le lieu est une ellipse rapportée à son centre. Si on avait $\theta = \theta_1$, le lieu serait la droite $(x + y) = 0$.

Ce cas particulier écarté, il est facile de voir que les axes de l'ellipse sont dirigés suivant les bissectrices des angles des axes ; car l'équation obtenue reste la même, lorsqu'on change x en y et y en x, ou bien encore x en $-y$, et $-y$ en x.

On aura les longueurs des axes, en déterminant les points de rencontre de la courbe et des bissectrices des angles des coordonnées. On trouve, pour les longueurs des demi-axes,

$$\frac{r\sin\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \frac{r\cos\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

L'ellipse est ainsi déterminée de grandeur et de position.