PROUHET

Sur le nombre des diagonales d'un polyèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 77-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__77_1>

SUR LE NOMBRE DES DIAGONALES D'UN POLYÈDRE (*).

Je désignerai par f le nombre des faces, par s le nombre des sommets et par a le nombre des arêtes du polyèdre. On sait qu'il existe entre ces trois quantités la relation

$$f + s = a + 2 \tag{1}$$

découverte par Euler.

(*) Ce problème a été traité par M. Henri Binder dans les *Archives* de Grunert, t. VIII, p. 221.

Soient, en outre, f_3 le nombre des faces triangulaires; f_4 le nombre des faces quadrangulaires, etc., et d le nombre des diagonales.

Le nombre des distances mutuelles des s sommets est $\frac{s(s-1)}{2}$. Pour avoir le nombre des diagonales, il faut retrancher les distances mutuelles des sommets des triangles, $3f_3$; celles des sommets des quadrilatères, $6f_4$, etc , ce qui donne

$$\frac{s(s-1)}{2} - 3f_3 - 6f_4 - 10f_5 - \ldots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \ldots$$

Mais chaque arête appartenant à deux faces a été retranchée deux fois; il faut donc ajouter a, et l'on aura

$$(2)\quad d = \frac{s(s-1)}{2} + a - 3f_3 - 6f_4 - \ldots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \ldots.$$

C'est la formule cherchée.

Exemples.

Tétraèdre :

$$s = 4,\quad a = 6,\quad f_3 = 4,\quad d = 0.$$

Hexaèdre à faces quadrangulaires :

$$s = 8,\quad a = 12,\quad f_3 = 0,\quad f_4 = 6,\quad f_5 = 0 \ldots,\quad d = 4.$$

Dodécaèdre à faces pentagonales :

$$s = 20,\ a = 30,\ f_3 = f_4 = f_6 = \ldots = 0,\ f_5 = 12,\ d = 100.$$

Remarque. — On peut écrire la formule (2) ainsi

$$(3)\quad d = \frac{s(s-3)}{2} + s + a - 3f_3 - 6f_4 - \ldots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \ldots.$$

Mais, d'après la formule d'Euler, on a

$$s + a = 2a + 2 - f.$$

D'ailleurs on a

$$(4) \qquad 2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots + nf_n + \ldots,$$

car le dernier membre donne le total des arêtes de toutes les faces, et chaque arête est comptée deux fois. Donc on pourra mettre l'équation (2) sous la forme

$$(5) \quad d = \frac{s(s-3)}{2} + 2 - f - 2f_4 - 5f_5 - 9f_6 - \ldots - \frac{n(n-3)}{2} f_n \ldots.$$

Corollaire I. — Le nombre des diagonales d'un polyèdre est toujours inférieur au nombre des diagonales du polygone qui a le même nombre de sommets, ce qui est d'ailleurs évident.

Corollaire II. — Si le polyèdre n'a que des faces triangulaires, on a

$$(6) \qquad d = \frac{s(s-3)}{2} + 2 - f.$$

D'ailleurs l'équation (4) donne

$$(7) \qquad 2a = 3f.$$

On peut éliminer entre les équations (1), (6) et (7) deux des trois quantités a, s, f, et en faisant le calcul on trouve pour d, l'une des trois formes

$$d = \frac{(s-3)(s-4)}{2} = \frac{(f-2)(f-4)}{8} = \frac{(a-3)(a-6)}{18}.$$

P.