

PROUHET

Sur le nombre des diagonales d'un polyèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 77-79

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__77_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE NOMBRE DES DIAGONALES D'UN POLYÈDRE (*).

Je désignerai par f le nombre des faces, par s le nombre des sommets et par a le nombre des arêtes du polyèdre. On sait qu'il existe entre ces trois quantités la relation

$$(1) \quad f + s = a + 2$$

découverte par Euler.

(*) Ce problème a été traité par M. Henri Binder dans les *Archives de Grunert*, t. VIII, p. 221.

Soient, en outre, f_3 le nombre des faces triangulaires; f_4 le nombre des faces quadrangulaires, etc., et d le nombre des diagonales.

Le nombre des distances mutuelles des s sommets est $\frac{s(s-1)}{2}$. Pour avoir le nombre des diagonales, il faut retrancher les distances mutuelles des sommets des triangles, $3f_3$; celles des sommets des quadrilatères, $6f_4$, etc, ce qui donne

$$\frac{s(s-1)}{2} - 3f_3 - 6f_4 - 10f_5 - \dots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \dots$$

Mais chaque arête appartenant à deux faces a été retranchée deux fois; il faut donc ajouter a , et l'on aura

$$(2) \quad d = \frac{s(s-1)}{2} + a - 3f_3 - 6f_4 - \dots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \dots$$

C'est la formule cherchée.

Exemples.

Tétraèdre :

$$s = 4, \quad a = 6, \quad f_3 = 4, \quad d = 0.$$

Hexaèdre à faces quadrangulaires :

$$s = 8, \quad a = 12, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 6, \quad f_5 = 0 \dots, \quad d = 4.$$

Dodécaèdre à faces pentagonales :

$$s = 20, \quad a = 30, \quad f_3 = f_4 = f_6 = \dots = 0, \quad f_5 = 12, \quad d = 100.$$

Remarque. — On peut écrire la formule (2) ainsi

$$(3) \quad d = \frac{s(s-3)}{2} + s + a - 3f_3 - 6f_4 - \dots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \dots$$

Mais, d'après la formule d'Euler, on a

$$s + a = 2a + 2 - f.$$

D'ailleurs on a

$$(4) \quad 2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots + nf_n + \dots,$$

car le dernier membre donne le total des arêtes de toutes les faces, et chaque arête est comptée deux fois. Donc on pourra mettre l'équation (2) sous la forme

$$(5) \quad d = \frac{s(s-3)}{2} + 2 - f - 2f_4 - 5f_5 - 9f_6 - \dots - \frac{n(n-3)}{2} f_n \dots$$

Corollaire I. — Le nombre des diagonales d'un polyèdre est toujours inférieur au nombre des diagonales du polygone qui a le même nombre de sommets, ce qui est d'ailleurs évident.

Corollaire II. — Si le polyèdre n'a que des faces triangulaires, on a

$$(6) \quad d = \frac{s(s-3)}{2} + 2 - f.$$

D'ailleurs l'équation (4) donne

$$(7) \quad 2a = 3f.$$

On peut éliminer entre les équations (1), (6) et (7) deux des trois quantités a , s , f , et en faisant le calcul on trouve pour d , l'une des trois formes

$$d = \frac{(s-3)(s-4)}{2} = \frac{(f-2)(f-4)}{8} = \frac{(a-3)(a-6)}{18}.$$

P.
