

JOHN GRIFFITHS

Sur le cercle des neuf points

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 339-340

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__339_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE CERCLE DES NEUF POINTS;

PAR M. JOHN GRIFFITHS,

Jesus college, Oxford.

Si nous considérons les trois cercles suivants : 1° le cercle des neuf points d'un triangle ABC, 2° le cercle circonscrit au même triangle, et 3° le cercle par rapport auquel chaque sommet A, B, C est le pôle du côté opposé, nous trouverons que leurs circonférences se coupent toutes les trois aux deux mêmes points, réels ou imaginaires.

En effet, soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des côtés CB, AC, BA, on sait que les équations des trois cercles seront respectivement

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \Sigma &= \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C \\ &- 2(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = 0, \end{aligned} \right. \\ (2) \quad & S = \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = 0, \\ (3) \quad & S' = \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\Sigma = S' - 2S;$$

d'où l'on voit que les circonférences Σ , S' et S se coupent aux deux mêmes points.

Pour obtenir l'équation de la ligne passant par ces deux points, nous avons

$$\begin{aligned} S' + 2S &= \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C \\ &+ 2(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) \\ &= 2(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C)(\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C), \end{aligned}$$

parce que

$$A + B + C = \pi.$$

Donc

$$(4) \quad \alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0$$

est l'équation cherchée.

Remarques.

1^o Le pôle de l'axe radical (4) par rapport au cercle S' est donné par les équations

$$\alpha \sin A = \beta \sin B = \gamma \sin C,$$

c'est-à-dire que le pôle se confond avec le centre de gravité de l'aire ABC.

2^o L'équation $\Sigma = 0$ peut prendre les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha [\alpha \sin A \cos A - (\beta \sin C + \gamma \sin B)] \\ + (\beta \sin B - \gamma \sin C)(\beta \cos B - \gamma \cos C) = 0, \\ \beta [\beta \sin B \cos B - (\gamma \sin A + \alpha \sin C)] \\ + (\gamma \sin C - \alpha \sin A)(\gamma \cos C - \alpha \cos A) = 0, \\ \gamma [\gamma \sin C \cos C - (\alpha \sin B + \beta \sin A)] \\ + (\alpha \sin A - \beta \sin B)(\alpha \cos A - \beta \cos B) = 0. \end{aligned}$$

Note du Rédacteur. — Quand les trois angles A, B, C sont aigus, le rayon de la circonférence S' , conjuguée au triangle ABC, est imaginaire, et il en est de même des deux points communs aux circonférences Σ , S, S' . — Si l'un des angles A, B, C, par exemple A, est obtus, le cercle S' est réel; il a pour centre le point de rencontre H des trois hauteurs AD, BE, CF du triangle ABC, et pour rayon une moyenne géométrique entre HA et HD. Dans ce cas, il est évident que les circonférences S, S' se coupent en deux points réels. — Lorsque le triangle ABC est rectangle, le rayon de S' est nul; les deux points communs coïncident en un seul qui est le sommet de l'angle droit. G.