NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations dans les coniques planes par Gauss, constante de Gauss et problème de Kepler

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 148-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__148_0>

RELATIONS DANS LES CONIQUES PLANES PAR GAUSS,
Constante de Gauss et Problème de Kepler.

ELLIPSE.

Équation polaire, foyer, pôle.

Notations.

$r =$ rayon vecteur.

$v =$ angle du rayon vecteur avec la partie du grand axe compris entre le foyer et le sommet voisin et compté depuis cette partie; $v = 0$ rayon vecteur minimum; $v = 180^\circ$ rayon vecteur maximum. v compris entre 180° et 360° donne la seconde moitié de l'ellipse, courbe fermée.

$a =$ demi grand axe de l'ellipse.

$\varphi =$ angle formé par le rayon vecteur passant par le petit axe et le rayon vecteur qui passe par son extrémité; rayon vecteur égal à $a = \sin\varphi = \frac{b}{a}$; $b =$ demi petit axe.

$p =$ demi-paramètre.

$e =$ nombre donné; lorsque $e = \sqrt{a^2 - ap}$, e est la distance du centre à un foyer, dite l'*excentricité*.

E $=$ angle dont le cosinus est égal à $\frac{a-r}{ae} =$ anomalie excentrique.

Relations.

I. $p = a\cos^2\varphi$.

II. $r = \frac{p}{1 + e\cos v}$.

III. $r = a(1 - e\cos E)$.

IV. $\cos E = \dfrac{e + \cos v}{1 + e\cos v}$.

V. $\sin\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos E)} = \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e\cos v}}$

$= \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{r(1-e)}{p}} = \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{r}{a(1+e)}}$.

VI. $\cos\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos E)} = \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{1+e}{1+e\cos v}}$

$= \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{r(1+e)}{p}} = \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{r}{a(1-e)}}$.

VII. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}E = \operatorname{tang}\frac{1}{2}v\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right)$

$= \operatorname{tang}\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$.

VIII. $\sin E = \dfrac{r\sin v\cos\varphi}{p} = \dfrac{r\sin v}{a\cos\varphi}$.

IX. $r\cos v = a(\cos E - e)$

$= 2a\cos\left(\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\varphi + 45^\circ\right)\cos\left(\frac{1}{2}E - \frac{1}{2}\varphi - 45^\circ\right)$.

X. $\sin\frac{1}{2}(v - E) = \sin\frac{1}{2}\varphi\sin v\sqrt{\dfrac{r}{p}} = \sin\frac{1}{2}\varphi\sin E\sqrt{\dfrac{a}{r}}$.

XI. $\sin\frac{1}{2}(v + E) = \cos\frac{1}{2}\varphi\sin v\sqrt{\dfrac{r}{p}} = \sin\frac{1}{2}\varphi\sin E\sqrt{\dfrac{a}{r}}$.

Demi petit axe $= a\cos\varphi = \dfrac{p}{\cos\varphi} = \sqrt{ap}$.

Distance du centre au foyer $= \dfrac{ep}{1-e^2} = ae$; e est l'excentricité $=$ distance moyenne.

HYPERBOLE.

$\psi =$ angle dont le cosinus égale $\frac{1}{e}$.

Pendant que v croît entre les limites $-(180-\psi)$, $+(180-\psi)$, r approchant de ces limites croît indéfiniment, et atteignant ces limites, r devient infini, ce qui indique qu'une droite faisant avec l'axe focal un angle supérieur ou inférieur à $180^\circ - \psi$ ne coupe pas l'hyperbole. La courbe est formée de deux branches séparées par un espace vide.

Ces valeurs exclues, les valeurs de r comprises entre $180^\circ - \psi$ et $180^\circ + \psi$ donnent des valeurs négatives pour r^n, qui indique que le rayon vecteur coupe une hyperbole et par l'autre

$$r = \frac{p}{1 + e \cos r}:$$

faisant successivement

$$\varphi = 0, \quad \varphi = 180^\circ,$$

on trouve les rayons vecteurs minima dans les deux branches, et le demi-axe focal $= \frac{p}{1 - c^2}$.

Relations.

φ et E deviennent imaginaires.

Notations.

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(v - \psi)}{\cos \frac{1}{2}(v + \psi)} = u.$$

ψ angle dont le cosinus $= \frac{1}{e}$; faisons $a = -b$, b étant positif.

PARABOLE.

Equation polaire, le foyer étant le pôle,

$$r = \frac{p}{1 - \cos v};$$

cette équation suffit.

Gauss ne donne pas cette équation

$$N = \frac{e[2(u^2 - 1)]}{2u},$$

analogue à l'anomalie moyenne dans l'ellipse.

Relations.

I. $b = p \cot^2 \psi$.

II. $r = \dfrac{p}{1 + e \cos v} = \dfrac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cos \frac{1}{2}(v + \psi)}$.

III. $\tan \frac{1}{2} F = \tan \frac{1}{2} v \sqrt{\dfrac{1 - e}{1 + e}} = \tan \frac{1}{2} v \tan \frac{1}{2} \psi$

$$= \frac{u - 1}{u + 1}.$$

IV. $u = \dfrac{1 + \tan \frac{1}{2} F}{1 - \tan \frac{1}{2} F} = \tan\left(45° + \frac{1}{2} F\right)$.

V. $\dfrac{1}{\cos F} = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{1 + \cos \psi \cos v}{2 \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cos \frac{1}{2}(v + \psi)}$

$$= \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}.$$

VI. $\sin \frac{1}{2} v \sqrt{r} = \sin \frac{1}{2} F \sqrt{\dfrac{p}{(e - 1) \cos F}}$

$$= \sin \frac{1}{2} F \sqrt{\frac{e + \cos v}{\cos F}}.$$

$$\text{VII.}\quad \cos\frac{1}{2}v\sqrt{r} = \cos\frac{1}{2}F\sqrt{\frac{p}{(1+e)\cos F}}.$$

$$\text{VIII.}\quad r\sin v = p\cot\psi\,\mathrm{tang}\,F = \frac{1}{2}\,b\,\mathrm{tang}\,\psi\left(u-\frac{1}{u}\right).$$

$$\text{IX.}\quad r\cos v = b\,(1-\cos F) = \frac{1}{2}\,b\left(2e-u-\frac{1}{u}\right).$$

$$\text{X.}\quad r = b\left(\frac{e}{\cos F}-1\right) = \frac{1}{2}\,b\left[e\left(u+\frac{1}{u}\right)-2\right].$$

Le calcul différentiel donne

$$\int r^2\,dv = b^2\,\mathrm{tang}\,\psi\left[\frac{1}{2}\,e\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\right]$$

$$= b^2\,\mathrm{tang}\,\psi\left[\frac{1}{2}\,e\left(1+\frac{1}{u^2}\right)-\frac{1}{u}\right]du,$$

et intégrant

$$b^2\,\mathrm{tang}\,\psi\left[\frac{1}{2}\,e\left(u-\frac{1}{u}\right)\right]-\log u = \sqrt{b}\,\sqrt{u}.$$

Le logarithme est hyperbolique.

$$\text{XI.}\quad \frac{1}{2}\left(\frac{u^2-1}{u}\right)-\log u = \frac{kt}{b^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{XII.}\quad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{tang}\,\psi\,\sin v}{2\cos\frac{1}{2}(v+\psi)\cos\frac{1}{2}(v-\psi)} - \frac{\log\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)}.$$

CONSTANTE DE GAUSS.

Cette constante est relative aux lois de Kepler.

Supposons une *seule* planète soumise à l'attraction du Soleil, et par conséquent elle décrira une conique autour du Soleil placé au foyer de la conique, et son mouvement ne subira aucune perturbation, puisqu'il n'existe pas de corps perturbant.

Notations.

$t =$ le temps.

$\frac{1}{2} g =$ aire du secteur décrit par le rayon vecteur pendant le temps t.

$p =$ paramètre.

$\mu =$ masse de la planète, celle du Soleil prise pour unité; l'expression $\frac{g}{t\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}}$ est constante pour toutes les planètes de notre système, chacune prise isolément. Représentons cette constante par k, on a

$$k = \frac{g}{t\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}}.$$

1° Soit, pour la même planète et un temps t', l'aire correspondante égale g'; p et μ ne changent pas; donc

$$\frac{g}{t} = \frac{g'}{t'},$$

c'est-à-dire les aires décrites sont proportionnelles au temps (loi de Kepler).

2° Pour deux planètes différentes, dans des temps égaux, les carrés des g sont proportionnels aux paramètres multipliés par la somme de la masse du Soleil et de la masse de la planète (loi de Kepler).

3° Soit T le temps employé à décrire tout le périmètre de l'ellipse; alors

$$\frac{1}{2} g = \pi ab, \quad a = \text{demi grand axe}, \quad b = \text{demi petit axe}.$$

Ainsi

$$T^2 = \frac{\pi ab}{p(1+\mu)}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad T^2 = \frac{\pi a 3 b}{t}, \quad T = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi};$$

les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes (loi de Kepler).

Prenons pour planète la Terre et pour unité linéaire la distance de la Terre au Soleil, alors la constante k, et pour temps l'année sidérale pendant laquelle s'accomplit une révolution entière; nous aurons

$$k = \frac{2\pi}{T\sqrt{1+\mu}}:$$

$$T = 365,2563835 \qquad \mu = \frac{1}{354710}$$

$$\begin{aligned} \log 2\pi &= 0,7981798684 \\ c^t \log T &= 7,4374021852 \\ c^t \log \sqrt{1+\mu} &= 9,9999993878 \\ \hline \log k &= 8,2355814414 \\ k &= 0,01720209895. \end{aligned}$$

PROBLÈME DE KEPLER.

$$g = kt\sqrt{p}\sqrt{1+\mu} = \int r^2\, dv,$$

$$\text{(VI)} \qquad \frac{p\cos^2\frac{1}{2}E}{(1+e)\cos^2\frac{1}{2}v}.$$

A l'aide de cette équation et de la relation VII, on trouve

$$r^2\, dv = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(E - e\sin E);$$

intégrant

$$kt\sqrt{p}\sqrt{1+\mu} = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(E - \sin E),$$

la constante est nulle; car, comptant du périhélie, on a $v = 0$ et aussi $E = 0$.

$$k + \sqrt{p}\sqrt{1+\mu} = \frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = E - e\sin E.$$

E étant exprimé en secondes, il faut exprimer $kt\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}$ aussi en secondes. Or la longueur du rayon 1 en secondes est 206264,67; c'est par cette quantité qu'on devra multiplier $kt\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}$. Réduite ainsi en secondes, cette quantité, désignée par M, porte le nom d'*anomalie moyenne; k* réduite en secondes égale 3548″,18761 dont le logarithme est 3,55000657 46.

M. de Gasparis (*) a donné dans les *Astronomische Nachrichten*, t. XLVI, p. 19-62 (1857) des Tables pour la solution du problème de Kepler, e étant supposé < 1.