Sur les intersections des courbes algébriques planes ; d'après le Rév. Salmon

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 112-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__112_0>

SUR LES INTERSECTIONS DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES;

D'APRÈS LE RÉV. SALMON (*).

Théorème I. — Par $\frac{n(n+3)}{2}$ points fixes on peut décrire une courbe de degré n et une seule, généralement parlant. Si parmi ces $\frac{n(n+3)}{1.2}$ points il s'en trouve un nombre plus grand que $pn - \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ sur une courbe de degré p, où $p < n$, alors il est impossible de faire passer une courbe de degré n par ces $\frac{n(n+3)}{2}$ points.

Théorème II. — Toutes les courbes du $n^{ième}$ degré qui passent par $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ points fixes, passent aussi par $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ autres points fixes.

Théorème III. — Un polygone de $2n$ côtés étant inscrit dans une conique, les $n(n-2)$ points d'intersection des côtés impairs avec les côtés pairs non adjacents sont sur une courbe de degré $n-2$.

Théorème IV. — Si parmi les n^2 points d'intersection de deux courbes de degré n, il s'en trouve np sur une

(*) Ces théorèmes ont déjà été démontrés dans les *Nouvelles Annales*. Nous les récapitulons dans l'intérêt des élèves.

courbe de degré $p < n$, les $n^2 - np$ points d'intersection restants sont sur une courbe de degré $n - p$.

Théorème V. — Une courbe du $n^{ième}$ degré qui passe par $np - \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ points d'une courbe de degré $p < n$, rencontre encore cette courbe en $\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ points.

Théorème VI. — Deux courbes de degré m et n se coupant en mn points, une courbe de degré r qui passe par $\frac{(m+n-r-1)(m+n-r-2)}{1.2}$ de ces points, où r est supérieur à m ou à n, mais non supérieur à $m+n-3$, passe aussi par les points restants des mn points.

Note historique. — Euler paraît être le premier qui ait signalé le paradoxe de deux courbes du $n^{ième}$ degré qui passent par un nombre plus grand de points qu'il n'est nécessaire pour déterminer une telle courbe (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1748); la même difficulté a été énoncée par Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, 1750. Toutefois les importants théorèmes qui découlent de ce paradoxe sont d'une date très-récente; ainsi le théorème IV est de Gergonne (*Annales*, t. XVII, p. 220; 1827); le théorème II, aussi de 1827, appartient à M. Plücker (*Entwickelungen*, vol. I, p. 228, et *Gergonne Annal.*, vol. XIX, pp. 97, 129); le théorème V est le sujet de deux Mémoires envoyés en même temps à Crelle, l'un par Jacobi (t. XV, p. 285), un autre par Plücker (t. XVI, p. 47); le théorème VI, le plus général, est de M. Cayley (*Cambridge Mathematical Journal*, t. III, p. 211).
