

GERONO

## Question d'examen (École navale)

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 20  
(1861), p. 391-393

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1861\\_1\\_20\\_\\_391\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__391_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).**

---

*Quel est le plus grand quadrilatère que l'on puisse former avec quatre côtés donnés  $a, b, c, d$ ?*

Soit ABCD l'un des quadrilatères que l'on peut former en prenant pour côtés consécutifs  $a, b, c, d$ . Supposons  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ . En nommant  $S$  l'aire de ce quadrilatère, on aura

$$(1) \quad S = \frac{1}{2}(ad \sin A + bc \sin C).$$

En outre

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C, \quad \text{et} \quad \overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A,$$

donc

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C;$$

( 392 )

d'où

$$2 ad \cos A - 2 bc \cos C = a^2 + d^2 - b^2 - c^2;$$

$$\cos A - \left( \frac{bc}{ad} \right) \cos C = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2 \cdot ad}.$$

Si l'on pose

$$\frac{bc}{ad} = h \quad \text{et} \quad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2 ad} = k,$$

l'équation précédente deviendra

$$(2) \quad \cos A - h \cos C = k.$$

D'autre part, l'équation (1) donne

$$(3) \quad \sin A + h \sin C = \frac{2 \cdot S}{ad}.$$

Élevant au carré les équations (2) et (3) et additionnant, il vient

$$1 + h^2 - 2h(\cos A \cos C - \sin A \sin C) = k^2 + \frac{4S^2}{a^2 d^2},$$

ou

$$1 + h^2 - 2h \cos(A + C) = k^2 + \frac{4S^2}{a^2 d^2};$$

et par conséquent

$$(4) \quad S = \frac{ad}{2} \sqrt{1 + h^2 - 2h \cdot \cos(A + C) - k^2}.$$

L'équation (4) montre que la plus grande valeur de S correspond à

$$\cos(A + C) = -1,$$

égalité qui donne

$$A + C = 180^\circ.$$

Il en faut conclure que *le plus grand des quadrilatères*

que l'on puisse former avec quatre côtés donnés  $a, b, c, d$ , est le quadrilatère inscriptible dans un cercle.

En remplaçant  $\cos (A + C)$  par  $-1$ , l'équation (4) devient

$$S = \frac{ad}{2} \sqrt{(h + 1)^2 - k^2} = \frac{ad}{2} \sqrt{(h + 1 + k)(h + 1 - k)}$$

ou, parce que  $h = \frac{bc}{ad}$  et  $k = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad}$ ,

$$S = \frac{ad}{2} \sqrt{\frac{(2bc + 2ad + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2bc + 2ad - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)}{2 \cdot ad}},$$

équation qui donne successivement

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{[(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2]};$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a + d + b - c)(a + d + c - b)(b + c + a - d)(b + c + d - a)}.$$

Si l'on désigne par  $2p$  la somme des quatre droites données, on aura pour l'expression du maximum de  $S$ ,  
 $\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$ . G.