E. PROUHET

Sur les formules d'interpolation de Lagrange et de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 278-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__278_1>

SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON;

PAR M. E. PROUHET.

Je me propose dans cette Note d'abréger, en me servant d'une notation plus concise, les calculs au moyen desquels M. Gerono (*) parvient à déduire la formule de Newton de celle de Lagrange.

Pour mieux fixer les idées, je me bornerai au cas où l'on donne cinq valeurs u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 d'une fonction $f(x)$ du quatrième degré, correspondant à cinq valeurs x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 de la variable. Dans la formule de Newton x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 forment une progression arithmétique qu'on peut supposer être la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, 4; car on sait ramener tous les autres cas à celui-là.

La formule de Lagrange peut s'écrire ainsi :

$$f(x) = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3 + X_4 u_4,$$

X_0, X_1, X_2, etc., étant des fonctions du quatrième degré qui jouissent de cette propriété que chacune d'elles se réduit à l'unité quand on y substitue la valeur de x qui porte le même indice et s'annule pour toute valeur de x d'un indice différent.

Si l'on remplace, dans cette formule, u_1 par $u_0 + \Delta u_0$, u_2 par $u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$, etc., elle devient

$$\begin{aligned} f(x) = (X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4)\, & u_0 \\ + (X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4)\, & \Delta u_0 \\ + (X_2 + 3X_3 + 6X_4)\, & \Delta^2 u_0 \\ + (X_3 + 4X_4)\, & \Delta^3 u_0 \\ + X_4\, & \Delta^4 u_0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \ldots .$$

Le coefficient de u_0 se réduit à l'unité quand on y fait $x = 0$, puisque alors $X_0 = 1$, et que X_1, X_2, X_3, X_4 s'an-

(*) *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 317 et 358.

nulent. Il en est de même quand on fait

$$x = 1, 2, 3, 4.$$

Donc l'expression

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 1,$$

qui est du quatrième degré tout au plus, et qui s'annule pour cinq valeurs différentes de la variable, est identiquement nulle, et l'on a

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1,$$

comme l'a démontré M. Gerono.

Le coefficient de Δu_0 est divisible par x, puisque X_1, X_2, X_3, X_4 s'annulent pour $x = 0$. Si l'on divise ce coefficient par x, le quotient

$$\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{x},$$

qui est du troisième degré seulement, se réduit à 1 pour $x = 1, 2, 3, 4$. Donc ce quotient est constant et égal à 1. On a donc

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = x$$

Le coefficient de $\Delta^2 u_0$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 1$. Le quotient

$$\frac{X_2 + 3X_3 + 6X_4}{x(x-1)},$$

qui est du second degré, se réduit à $\frac{1}{2}$ pour les trois valeurs 2, 3, 4 de x. Donc ce quotient est égal à $\frac{1}{2}$. On a donc

$$X_2 + 3X_3 + 6X_4 = \frac{x(x-1)}{1.2}.$$

On prouverait de même que l'on a

$$X_3 + 4X_4 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3},$$

$$X_4 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4};$$

donc on a bien

$$f(x) = u_0 + \frac{x}{1}\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0,$$

ce qui est la formule de Newton.

Il est vrai que cette formule n'est démontrée que pour le cas d'une fonction du quatrième degré. Mais il est facile de s'assurer que la loi trouvée pour les coefficients de Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc., est générale. En effet, supposons que m soit le degré de la fonction $f(x)$, p étant un nombre moindre que m, le coefficient de $\Delta^p u_0$ sera, d'après ce qui précède,

$$X_p + (p+1)X_{p+1} + \frac{(p+2)(p+1)}{1.2}X_{p+2} + \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{1.2.3}X_{p+3} + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}X_m.$$

Ce polynôme est évidemment divisible par x, $x-1$, $x-2$, $x-p+1$, et son quotient par

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)$$

est égal à $\frac{1}{1.2.3\ldots p}$ pour $x = p$, $p+1$, $p+2,\ldots, m$, c'est-à-dire pour un nombre de valeurs supérieur à son degré. Donc le quotient a une valeur constante et le coefficient de $\Delta^p u_0$ est

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)}{1.2.3\ldots p}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'égalité identique

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1,$$

démontrée par M. Gerono pour le cas où les valeurs x_0, $x_1, \ldots, x_4$ forment une progression arithmétique, est vraie quelles que soient ces quantités, comme on le voit en répétant le raisonnement fait plus haut et qui est celui de M. Gerono. Comme toutes les parties du premier membre de cette identité sont du quatrième degré, il faudra donc qu'en faisant la réduction des termes, les coefficients de x^4, x^3, x^2, x disparaissent et que le terme tout connu se réduise à 1. De là, les identités suivantes, où pour plus de simplicité, on a remplacé x_0, x_1, etc., par des lettres sans indice :

$$\sum \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 0,$$

$$\sum \frac{b+c+d+e}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 0,$$

$$\sum \frac{bc+bd+be\ldots}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 0,$$

$$\sum \frac{bcd+bce+bde+cde}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 0,$$

$$\sum \frac{bcde}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 1.$$

On aura des identités analogues pour un nombre quelconque de lettres. Par exemple, dans le cas de trois quantités, on aurait

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0,$$

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a+c}{(b-a)(b-c)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}=0,$$

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$