NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CREMONA

Solution de la question 465

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 151-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__151_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 465

(voir t. XVIII, p. 117);

PAR M. CREMONA,
Professeur à Crémone.

Soient a_0, a_1,..., a_{n-1}, n quantités quelconques ; α une racine primitive de l'équation binôme

$$x^n - 1 = 0,$$

et

$$\theta_r = a_0 + a_1 \alpha_r + a_2 \alpha_r^2 + \ldots + a_{n-1} \alpha_r^{n-1},$$

en supposant $\alpha_r = \alpha^r$.

Multiplions entre eux les deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 \ldots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

En exécutant la multiplication par lignes, les colonnes du déterminant produit deviennent divisibles respectivement par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, et l'on a

$$D\Delta = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2}^2 \ldots & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots & \alpha_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Or le déterminant du second membre est évidemment égal à $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta$; donc

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n.$$

Ce théorème, mentionné par M. Michael Roberts (*Nouvelles Annales*, cahier de mars 1859, p. 87) est de M. Spottiswoode (*Journal* de Crelle, t. LI); la démonstration ci-dessus m'a été communiquée par M. Brioschi, et je l'ai publiée comme lemme dans une petite Note *Intorno ad un teorema di Abel* (*Annali* di Tortolini, 1856).

En supposant

$$a_r = a + rd,$$

il s'ensuit

$$\theta_r = \frac{nd}{\alpha_r - 1} \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, \ldots, n-1$$

et

$$\theta_n = na + \frac{n(n-1)}{2} d;$$

donc

$$\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{n-1} = (-1)^{n-1} n^{n-2} d^{n-1},$$

et, par conséquent,

$$D = \begin{vmatrix} a & a+d \ldots & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d \ldots & a \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha+(n-1)d & a \ldots & a+(n-2)d \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} (nd)^{n-1} \left[a + \frac{(n-1)d}{2}\right],$$

ce qui est bien la question 465.