NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 407-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__407_1>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 89),

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

CHAPITRE III.

CÔNES ET CYLINDRES.

§ I. — *Conditions pour qu'une équation de degré quelconque représente une surface conique ou une surface cylindrique.*

57. Nous avons remarqué, dans la discussion des surfaces du second ordre, que l'équation du second degré représentait un cône lorsque le discriminant ou le *Hessien* de cette fonction était nul, et un cylindre, lorsque le Hessien et la dérivée du Hessien par rapport au paramètre a_{44} étaient nuls tous deux. Je vais généraliser ce

(*) Ces asymptotes sont peut-être du genre parabolique. TM.

théorème, en cherchant les conditions analogues pour une équation de degré quelconque.

Le théorème relatif aux surfaces coniques a été donné par M. Hesse, et se trouve reproduit dans l'ouvrage de M. Brioschi sur les déterminants et dans les *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 398. Quant au théorème sur les surfaces cylindriques, je ne crois pas qu'il ait encore été énoncé.

58. Si $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ représentent les coordonnées d'un point situé sur la surface dont l'équation est

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{1}$$

on sait que l'équation du plan tangent en ce point est

$$X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3 + X_4 u_4 = 0, \tag{2}$$

$\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}$ désignant les coordonnées d'un point quelconque de ce plan, et

$$u_r = \frac{du}{dx_r}. \tag{3}$$

59. Lorsque l'équation (1) appartient à une *surface conique*, le plan tangent jouit de la propriété caractéristique de passer constamment par un point fixe. Cette propriété sera traduite par l'identité suivante :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0, \tag{4}$$

dans laquelle α_1, α_2, α_3, α_4 sont des constantes.

En différentiant cette identité successivement par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4, on en conclut

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} + \alpha_3 u_{31} + \alpha_4 u_{41} = 0, \\ \alpha_1 u_{12} + \alpha_2 u_{22} + \alpha_3 u_{32} + \alpha_4 u_{42} = 0, \\ \alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{23} + \alpha_3 \alpha_{33} + \alpha_4 u_{43} = 0, \\ \alpha_1 u_{14} + \alpha_2 u_{24} + \alpha_3 u_{34} + \alpha_4 u_{44} = 0, \end{array} \right.$$

après avoir posé

$$(6) \qquad u_{r,s} = u_{s,r} = \frac{d^2 u}{dx_r\, dx_s} = \frac{d^2 u}{dx_s\, dx_r}.$$

La simultanéité des quatre équations (5) entraîne comme conséquence immédiate

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

ce déterminant est ce qu'on appelle le *Hessien* de la fonction u; je le désignerai désormais par H_u.

Donc, *si l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface conique, le Hessien de la fonction u *est identiquement nul.*

60. Il faut maintenant établir la réciproque de cette proposition.

La formule

$$(8) \qquad H_u \frac{d^2 H_u}{du_{r,s}\, du_{r_1,s_1}} = \frac{dH_u}{du_{r,s}} \frac{dH_u}{du_{r_1,s_1}} - \frac{dH_u}{du_{r,s_1}} \frac{dH_u}{du_{r_1,s}}$$

conduit à l'identité

$$(9) \qquad \frac{dH_u}{du_{r,r}} \frac{dH_u}{du_{s,s}} = \left(\frac{dH_u}{du_{r,s}}\right)^2,$$

par suite de l'hypothèse $H_u = 0$.

Mais les fonctions $\frac{dH_u}{du_{r,s}}$ sont toutes du même degré; et comme l'identité (9) exige que tous les diviseurs linéaires de $\frac{dH_u}{du_{r,r}}$ appartiennent aussi à la fonction $\frac{dH_u}{du_{r,s}}$, nous en conclurons

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{r,s}} = k\,\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{r,r}}, \\[2ex] \dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{r,s_1}} = k_1\,\dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{r,r}}, \end{cases}$$

k et k_1 désignant des constantes.

On déduit de ces dernières relations

$$(11)\qquad \frac{\dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{r,s}}}{\dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{r,s_1}}} = \text{constante}.$$

En donnant à s_1 la valeur 4, et en faisant successivement $s = 1, 2, 3$, on obtient enfin

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{1,r}} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_4}\,\dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{4,r}}, \\[2ex] \dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{2,r}} = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_4}\,\dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{4,r}}, \\[2ex] \dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{3,r}} = \dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\,\dfrac{d\mathrm{H}_u}{du_{4,r}}. \end{cases}$$

Les quantités $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ sont des constantes.

Or l'homogénéité de la fonction u et de ses dérivées conduit aux identités

$$(13)\qquad \begin{cases} (m-1)\,u_1 = x_1 u_{11} + x_2 u_{12} + x_3 u_{13} + x_4 u_{14}, \\ (m-1)\,u_2 = x_1 u_{21} + x_2 u_{22} + x_3 u_{23} + x_4 u_{24}, \\ (m-1)\,u_3 = x_1 u_{31} + x_2 u_{32} + x_3 u_{33} + x_4 u_{34}, \\ (m-1)\,u_4 = x_1 u_{41} + x_2 u_{42} + x_3 u_{43} + x_4 u_{44}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$x_r\,\frac{\mathrm{H}_u}{m-1} = u_1\,\frac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{1,r}} + u_2\,\frac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{2,r}} + u_3\,\frac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{3,r}} + u_4\,\frac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{4,r}}.$$

Si l'on remarque que H_u est nul, par hypothèse, et qu'on ait égard aux équations (12), cette identité prendra la forme suivante

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0.$$

Mais cette relation exprime que le plan tangent à la surface $u = 0$ passe par le point fixe $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$; donc l'*équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

appartient à une surface conique. C. Q. F. D.

Les coordonnées $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ du sommet sont données par les équations

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_4} &= \frac{\dfrac{dH_u}{du_{1,r}}}{\dfrac{dH_u}{du_{4,r}}}, \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_4} &= \frac{\dfrac{dH_u}{du_{2,r}}}{\dfrac{dH_u}{du_{4,r}}}, \\ \frac{\alpha_3}{\alpha_4} &= \frac{\dfrac{dH_u}{du_{3,r}}}{\dfrac{dH_u}{du_{4,r}}}. \end{aligned}\right.$$

61. Lorsque l'équation

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique, le plan tangent jouit de la propriété d'être constamment parallèle à une même droite, propriété qui sera traduite par l'identité suivante

$$(15)\qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0,$$

α_1, α_2, α_3 désignant des constantes.

En différentiant cette identité successivement par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4, on obtient

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} + \alpha_3 u_{31} = 0,\\ &\alpha_1 u_{12} + \alpha_2 u_{22} + \alpha_3 u_{32} = 0,\\ &\alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{23} + \alpha_3 u_{33} = 0,\\ &\alpha_1 u_{14} + \alpha_2 u_{24} + \alpha_3 u_{34} = 0. \end{aligned}\right.$$

Prenant ces équations trois à trois, on en conclut les identités

$$\frac{d\mathrm{H}_u}{du_{44}} = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}_u}{du_{43}} = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}_u}{du_{42}} = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}_u}{du_{41}} = 0.$$

Or

$$\mathrm{H}_u = u_{41}\frac{d\mathrm{H}_u}{du_{41}} + u_{42}\frac{d\mathrm{H}_u}{du_{42}} + u_{43}\frac{d\mathrm{H}_u}{au_{43}} + u_{44}\frac{d\mathrm{H}_u}{du_{44}};$$

donc on a, en vertu des relations précédentes,

$$\mathrm{H}_u = 0.$$

Ainsi, *lorsque l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique, on a nécessairement

$$\mathrm{H}_u = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}_u}{du_{44}} = 0;$$

c'est-à-dire *que le Hessien de la fonction* u *et la dérivée du Hessien par rapport à* u_{44} *sont identiquement nuls.*

62. Réciproquement, *si le Hessien de la fonction* u *et la dérivée du Hessien par rapport à* u_{44} *sont identiquement nuls, l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique.

De la formule

$$(17) \qquad H_u \frac{d^2 H_u}{du_{r,r}\, du_{s,s}} = \frac{d H_u}{du_{r,r}} \frac{d H_u}{du_{s,s}} - \left(\frac{d H_u}{du_{r,s}}\right)^2,$$

on conclut d'abord

$$\frac{d H_u}{du_{r,r}} \frac{d H_u}{du_{s,s}} = \left(\frac{d H_u}{du_{r,s}}\right)^2,$$

puisque

$$H_u = 0;$$

mais on a aussi

$$\frac{d H_u}{du_{44}} = 0;$$

donc

$$(18) \qquad \frac{d H_u}{du_{4,r}} = \frac{d H_u}{du_{r,4}} = 0.$$

En raisonnant comme dans la réciproque précédente, on obtiendra les identités

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d H_u}{du_{1,r}} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \frac{d H_u}{du_{3,r}}, \\ \frac{d H_u}{du_{2,r}} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \frac{d H_u}{du_{3,r}}, \end{aligned} \right.$$

qui ont lieu pour des valeurs de r différentes de 4 et dans lesquelles α_1, α_2, α_3 représentent des constantes.

En ayant égard aux relations (18) et (19), l'identité

$$x_r \frac{H_u}{m-1} = u_1 \frac{d H_u}{du_{1,r}} + u_2 \frac{d H_u}{du_{2,r}} + u_3 \frac{d H_u}{du_{3,r}} + u_4 \frac{d H_u}{du_{4,r}}$$

deviendra

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3' = 0.$$

Or cette relation exprime que le plan tangent à la surface $u = 0$ est constamment parallèle à une droite fixe; donc *l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique. C. Q. F. D.

La direction des génératrices est donnée par les équations

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} &= \frac{\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{1,r}}}{\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{3,r}}}, \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_3} &= \frac{\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{2,r}}}{\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{3,r}}}, \end{aligned} \right.$$

r étant différent de 4. α_1, α_2, α_3 sont proportionnels aux cosinus des angles de la direction des génératrices avec les axes des x_1, x_2, x_3.

63. La démonstration de ces deux théorèmes peut encore se présenter d'une autre manière. Le principe de cette seconde démonstration est le même que celui qui a été adopté par M. Brioschi, dans l'ouvrage déjà cité, pour la proposition relative aux surfaces coniques.

La fonction homogène $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ deviendra, par la transformation linéaire,

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4, \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4, \\ x_4 &= a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4, \end{aligned} \right.$$

une fonction homogène de y_1, y_2, y_3, y_4 que je désignerai par $v(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Or on a évidemment

$$(22)\quad \frac{dv}{dy_r} = v_r = u_1 a_{1,r} + u_2 a_{2,r} + u_3 a_{3,r} + u_4 a_{4,r};$$

d'où

$$(23)\quad \frac{d^2 v}{dy_r\, dy_s} = v_{r,s} = A_{1,r}\, a_{1,r} + A_{2,s}\, a_{2,r} + A_{3,s}\, a_{3,r} + A_{4,s}\, a_{4,r},$$

après avoir posé

$$(24)\qquad A_{r,s} = \frac{du_r}{dy_s}.$$

D'après la multiplication des déterminants, il résulte immédiatement

$$(25)\qquad H_v = P.Q;$$

égalité dans laquelle

$$P_v = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$H_v = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

D'un autre côté, on a

$$(26)\quad A_{r,s} = \frac{du_r}{dy_s} = u_{r,1}\, a_{1,s} + u_{r,2}\, a_{2,s} + u_{r,3}\, a_{3,s} + u_{r,4}\, a_{4,s},$$

d'où l'on conclut, d'après les mêmes principes,

$$(27) \qquad Q = P.H_u,$$

H_u désignant le Hessien de la fonction u.

Les formules qui précèdent conduisent facilement aux relations suivantes que je me contenterai d'énoncer :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dH_v}{dv_{r,s}} &= \frac{dP}{da_{1,r}} \frac{dQ}{dA_{1,s}} + \frac{dP}{da_{2,r}} \frac{dQ}{dA_{2,s}} \\ &\quad + \frac{dP}{da_{3,r}} \frac{dQ}{dA_{3,r}} + \frac{dP}{da_{4,r}} \frac{dQ}{dA_{4,s}}, \\ \frac{dQ}{dA_{r,s}} &= \frac{dH_u}{du_{r,1}} \frac{dP}{da_{1,s}} + \frac{dH_u}{du_{r,2}} \frac{dP}{da_{2,s}} \\ &\quad + \frac{dH_u}{du_{r,3}} \frac{dP}{da_{3,s}} + \frac{dH_u}{du_{r,4}} \frac{dP}{da_{4,s}}. \end{aligned} \right.$$

64. Ces préliminaires étant posés, passons à la question géométrique.

Les coordonnées d'un point quelconque étant représentées par $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$, j'effectue la transformation de coordonnées suivantes :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4, \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4, \\ x_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + a_{34} y_4, \\ x_4 &= 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + a_{44} y_4, \end{aligned} \right.$$

de sorte que les nouvelles coordonnées du même point seront $\frac{y_1}{y_4}$, $\frac{y_2}{y_4}$, $\frac{y_3}{y_4}$.

Si l'on pose

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

on aura, après avoir introduit l'hypothèse,

$$(30)\left\{\begin{array}{c} a_{41}=a_{42}=a_{43}=0, \\ P=a_{44}P_1, \\ \dfrac{dP}{da_{14}}=0, \quad \dfrac{dP}{da_{24}}=0, \quad \dfrac{dP}{da_{34}}=0, \quad \dfrac{dP}{da_{44}}=0. \end{array}\right.$$

Les relations (25), (27) et (30) donneront alors

$$(31)\qquad H_v=a_{44}^2 P_1^2 H_u,$$

et les relations (28) et (30) conduiront à

$$(32)\qquad \frac{dH_v}{dv_{44}}=P_1^2\frac{dH_u}{du_{44}}.$$

Les équations (31) et (32) sont la base de la seconde démonstration que je vais exposer.

65. Si l'équation

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$

représente une surface conique, on pourra toujours opérer une transformation de coordonnées telle, que le cône se trouve rapporté à son sommet, et, par suite, que l'équation

$$v(y_1, y_2, y_3, y_4)=0$$

soit homogène en y_1, y_2, y_3; ce qui entraîne, comme conséquence nécessaire,

$$\frac{d^2v}{dy_1\,dy_4}=\frac{d^2v}{dy_2\,dy_4}=\frac{d^2v}{dy_3\,dy_4}=\frac{d^2v}{dy_4^2}=0,$$

c'est-à-dire

$$v_{14}=v_{24}=v_{34}=v_{44}=0.$$

Mais alors le Hessien H_v est identiquement nul; donc, en vertu de la relation (31), il en est de même du Hessien H_u.

Ainsi, *lorsque l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface conique, le Hessien de la fonction u *est identiquement nul.*

Il n'était même pas nécessaire d'opérer la transformation générale (29) pour arriver à cette conséquence; mais comme elle est indispensable pour le cas du cylindre, j'ai préféré déduire les deux théorèmes d'une transformation unique.

Pour démontrer la réciproque de cette proposition, on établira d'abord, en adoptant le raisonnement exposé dans le n° 60, l'identité

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0. \tag{33}$$

Ceci posé, on voit immédiatement que la transformation linéaire

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{14} y_3 + \lambda\alpha_1 y_4, \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + \lambda\alpha_2 y_4, \\ x_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + \lambda\alpha_3 y_4, \\ x_4 &= 0 . y_1 + 0 . y_2 + 0 . y_3 + \lambda\alpha_4 y_4 \end{aligned}\right.$$

conduit à une équation

$$v(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

homogène en y_1, y_2, y_3. En effet, cette équation étant homogène en y_1, y_2, y_3, y_4, il suffit de constater que le premier membre est indépendant de la variable y_4, c'est-à-dire que

$$\frac{dv}{dy_4} = 0.$$

Or

$$\frac{dv}{dy_4} = u_1 \lambda\alpha_1 + u_2 \lambda\alpha_2 + u_3 \lambda\alpha_3 + u_4 \lambda\alpha_4;$$

mais le second membre est nul, d'après l'identité (33); et la réciproque se trouve ainsi démontrée.

66. Si l'équation

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique, on pourra toujours opérer une transformation de coordonnées telle, que le cylindre se trouve parallèle à l'un des axes, celui des y_3 par exemple; par suite, l'équation

$$v(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

ne devra pas renfermer de termes en y_3; ce qui entraîne comme conséquence

$$\frac{d^2 v}{dy_1\,dy_3} = \frac{d^2 v}{dy_2\,dy_3} = \frac{d^2 v}{dy_3^2} = \frac{d^2 v}{dy_4\,dy_3} = 0.$$

On voit alors que le Hessien H_v et la dérivée $\frac{dH_v}{du_{44}}$ sont identiquement nuls; donc, en vertu des relations (31) et (32), il en est de même de H_u et de $\frac{dH_u}{du_{44}}$.

Ainsi lorsque *l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique, le Hessien de la fonction u *ainsi que la dérivée du Hessien par rapport à* $u_{4,4}$ *sont identiquement nuls.*

Pour démontrer la réciproque, on établira, comme il a été fait au n° 62, l'identité

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0. \tag{34}$$

Ceci posé, on voit immédiatement que la transformation linéaire

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \lambda\alpha_1 y_3 + a_{14}y_4, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \lambda\alpha_2 y_3 + a_{24}y_4, \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + \lambda\alpha_3 y_3 + a_{34}y_4, \\ x_4 = 0.y_1 + 0.y_2 + 0.y_3 + a_{44}y_4, \end{cases}$$

conduit à une équation

$$v(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

qui sera homogène en y_1, y_2, y_4. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que la dérivée $\frac{dv}{dy_3}$ est identiquement nulle. Or on a

$$\frac{dv}{dy_3} = u_1\lambda\alpha_1 + u_2\lambda\alpha_2 + u_3\lambda\alpha_3;$$

d'où l'on conclut, d'après la relation (34),

$$\frac{dv}{dy_3} = 0.$$

Les deux conditions énoncées sont donc nécessaires et suffisantes.

(*La suite prochainement.*)