

Question d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 389-390

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__389_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE).

1. Si la différence $m^{\text{ième}}$ d'une fonction $f(x)$ est constante, la fonction est algébrique entière et du degré m (*).

1°. Lorsque la première différence d'une fonction $f(x)$ est une quantité constante c , la fonction est entière et du premier degré.

Soit h la différence constante de la variable; on aura, par hypothèse,

$$(1) \quad f(x+h) - f(x) = c;$$

et, en égalant les dérivées, par rapport à x , des deux membres de l'équation (1), il viendra

$$f'(x+h) - f'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(x+h) = f'(x).$$

Cette dernière relation montre que la dérivée de $f(x)$ reste invariable quelle que soit la valeur substituée à x ; donc, $f(x)$ est une fonction entière du premier degré.

2°. Lorsque la première différence d'une fonction $f(x)$ est un polynôme entier du degré n , la fonction est un polynôme entier du degré $(n+1)$.

En effet, par hypothèse, on a

$$(2) \quad f(x+h) - f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + R.$$

Puis, en prenant les dérivées de l'ordre $(n+1)$ par rapport à x ,

$$f_{n+1}(x+h) - f_{n+1}(x) = 0,$$

(*) C'est la réciproque de cette proposition du Programme officiel : La différence de l'ordre m d'une fonction entière du degré m est constante si la différence de la variable est elle-même constante.

ou

$$f_{n+1}(x+h) = f_{n+1}(x);$$

d'où l'on conclura, comme précédemment, que la dérivée de l'ordre $(n+1)$ de $f(x)$ est constante, et que, par conséquent, $f(x)$ est une fonction entière du degré $(n+1)$.

Au moyen de ces deux remarques, il est facile d'établir la proposition (1). Car, d'après la première, si la différence $m^{\text{ième}}$ de $f(x)$ est constante, la différence $(m-1)^{\text{ième}}$ de $f(x)$ est une fonction entière du premier degré. Donc (2°), la différence $(m-2)^{\text{ième}}$ sera une fonction entière et du second degré. Et ainsi de suite. G.