NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. MANNHEIM

Construction du centre de courbure de l'épicycloïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 371-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__371_0>

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE L'ÉPICYCLOIDE;

PAR M. A. MANNHEIM.

1. Désignons par f (*) le centre de la circonférence fixe F (**), par m le centre de la circonférence mobile M qui roule sur la première, et par d le point de contact de ces deux circonférences.

A étant une courbe quelconque liée à la circonférence M, on sait que le pied n de la normale abaissée du point d sur A est le point de contact de cette ligne avec la courbe qu'elle enveloppe pendant le mouvement de M. Soit a le centre de courbure de A correspondant au point n; après un mouvement infiniment petit, M touche F au point d', A touche son enveloppe au point n', et la ligne $d'n'$, normale à cette enveloppe, passe par la nouvelle position a' du centre de courbure a. Les droites dn, $d'n'$ sont deux normales infiniment voisines de la courbe enveloppée, elles se coupent donc au centre de courbure de cette courbe; elles sont aussi deux normales infiniment voisines de la courbe décrite par a. On voit donc que, *pour un mouvement infiniment petit de* M, *la courbe décrite par* a *et la courbe enveloppe de* A *ont même centre de courbure* (***).

2. Plus généralement, *deux courbes parallèles enveloppent deux courbes parallèles*. Cette propriété se démontre très-simplement.

(*) On est prie de faire les figures.

(**) La ligne fixe sur laquelle s'effectue le roulement de la ligne mobile porte le nom de *base* de la roulette.

(***) *Des méthodes en géométrie*, par M Paul Serret, p. 83.

3. La recherche du centre de courbure de la courbe enveloppe de A est donc ramenée à celle du centre de courbure de l'épicycloïde décrite par le point a.

Joignons le point a au point d, nous savons déjà que le centre de courbure est sur cette droite. Par le point f, menons parallèlement à am la droite fb, qui coupe ad au point b; les triangles adm et bdf sont semblables : on conclut de là que la longueur fb est constante.

Le lieu décrit par le point b lorsque la circonférence M roule sur F, est donc une circonférence ayant le point f pour centre. En outre, le rapport $\frac{ad}{db}$ étant constant, on voit que la normale ad est partagée, par trois courbes connues, dans un rapport constant : on peut donc appliquer les constructions données dans le numéro de septembre 1857, p. 323 (n[os] 5, 9, 11).

Menons au point d la tangente commune T aux deux circonférences F et M, au point a la perpendiculaire T_1 à ad, au point b la perpendiculaire T_2 à fb; la parabole tangente à T, T_1, T_2, ad touche cette dernière au centre de courbure de l'épicycloïde décrite par le point a (t. XVI, p. 325, n° 11).

Appliquons la construction donnée dans le même volume, au n° 10 de la page 324. La normale à l'élément décrit par le point a est ad, la normale à l'élément décrit par le point d est fd, et la normale à l'élément décrit par le point b est fb; il faut chercher une droite perpendiculaire à ad qui soit partagée par ces trois normales dans le rapport constant $\frac{ad}{db}$; le point où cette perpendiculaire coupera ad sera le centre de courbure cherché.

Pour cela, élevons au point d une perpendiculaire à ad; soient p et q les points où elle coupe am et bf; menons *fp*; soit α le point où elle coupe *ad* : ce point est le centre de courbure cherché, car la droite menée par ce point parallèlement à *dp* sera perpendiculaire à *ad* et sera partagée par les normales *ad*, *df*, *bf* dans le rapport $\frac{dp}{dq}$ ou $\frac{ad}{db}$.

4. La construction se réduit à élever au point *d* une perpendiculaire à *ad*, cette perpendiculaire coupe *am* au point *p*, la ligne *fp* coupe *ad* au centre de courbure α. Cette construction est due à M. Savary (*).

5. *Remarque.* Dans le cas particulier où le point *a* est sur la circonférence M, le point *b* est sur la circonférence F, et le point α est alors la conjuguée harmonique du point *a* par rapport aux points *d*, *b*.

On déduit facilement de là que l'épicycloïde décrite par un point de la circonférence M et sa développée sont deux courbes semblables.

6. De la construction générale que nous venons de donner, on déduit la formule de M. Savary de la manière suivante :

On sait que : *Étant donnés un angle dont le sommet est* m *et un point* o *dans son plan, on a, en observant la règle des signes, quelle que soit la direction d'une droite passant par ce point et coupant les côtés de l'angle aux points* c *et* d,

$$\left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right)\frac{1}{\sin dom} = \text{const. } (^{**})$$

(*) Voir *Traité de Géométrie descriptive* de M. Leroy, 2e édition, 1842, p. 386.

(**) Voir *Transformation des propriétés métriques des figures*, p. 3

D'après cela, dans l'angle apf on a

$$\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da} = \left(\frac{1}{df} - \frac{1}{dm}\right)\frac{1}{\sin fdp};$$

d'où la formule de M. Savary

$$\left(\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da}\right)\cos fd\alpha = \frac{1}{df} - \frac{1}{dm}.$$

Applications. 1°. *Une parabole roule sur une droite* T, *le foyer* a *de cette parabole décrit une courbe* (*chaînette*) ; *on demande pour une position arbitraire de* a *le centre de courbure de cette chaînette.*

Soit d le point où la parabole touche T ; prolongeons da d'une longueur égale à elle-même jusqu'en b ; au point b élevons une perpendiculaire sur bd, et au point d une perpendiculaire sur T : ces deux perpendiculaires se coupent en m, centre de courbure de la parabole. Au point d élevons une perpendiculaire à ad et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre c avec am ; du point c abaissons une perpendiculaire sur T : cette perpendiculaire coupe ad au centre de courbure cherché. On voit, par cette construction, que le point b est ce centre de courbure.

Remarques. La ligne bd est tangente à la développée de la chaînette ; la portion bd de cette tangente est toujours partagée en deux parties égales par le point a : on déduit de là (t. XVI, p. 326) que, pour obtenir au point b le centre de courbure de la développée de la chaînette, il faut prolonger mb d'une longueur égale à elle-même.

Dans le triangle dbm, md est le rayon de courbure de la parabole, bd est égale à deux fois le rayon de courbure de la chaînette, bm est égale au rayon de courbure de la développée de la chaînette ; en désignant par r, r_1, r_2

ces trois rayons, on a

$$r^2 = 4r_1^2 + r_2^2,$$

relation remarquable, due à M. Lamarle (*).

2°. Soient T la tangente au sommet d'une parabole, b le foyer et e le sommet de cette courbe; lorsqu'elle roule sur T, supposée fixe, b engendre une chaînette C tangente à une droite S menée par le point b parallèlement à T : *nous allons faire rouler cette chaînette sur la droite* S, *supposée fixe, et chercher le centre de courbure de la courbe enveloppée par sa base* T.

Soit a un point quelconque de C; il arrivera un moment où ce point sera sur S. Désignons par a' cette nouvelle position du point a, la droite T occupe maintenant la position T'; nous allons chercher pour cette position le centre de courbure de la courbe enveloppe de T.

Cherchons d'abord le centre de courbure de la chaînette au point a' : en ce point élevons une perpendiculaire à S, cette perpendiculaire coupe T' au point g; en prolongeant ga' d'une longueur égale à elle-même, nous obtenons, d'après ce que nous venons de voir, le centre de courbure de la chaînette pour le point a'.

En appliquant maintenant la construction (4) au point qui se trouve à l'infini sur la perpendiculaire abaissée du point a' sur T', on trouve que le point où cette perpendiculaire coupe T' est justement le centre de courbure cherché. Puisque la droite T dans ses différentes positions passe constamment par le centre de courbure de son enveloppe, cette enveloppe est un point, et ce point est le sommet e, pied de la perpendiculaire abaissée du point b sur T. On peut donc dire : *Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, sa base passe par un point fixe*, ou en-

(*) *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure*, p. 75.

core, *sa tangente au sommet enveloppe une circonférence.*

Remarque. Lorsque la chaînette touche S en a', e est le pied de l'ordonnée du point a; on voit immédiatement que la distance eb de ce point à la tangente S est constante, et que la distance ba' est égale à la longueur de l'arc de la chaînette compris entre a' et le sommet de cette courbe. Si l'on désigne par a la distance constante eb, par s l'arc compris entre a' et le sommet de la chaînette, par φ l'angle de S et de T', on a

$$s = a \operatorname{tang} \varphi,$$

équation très-simple de la chaînette entre les coordonnées s et φ (*Éléments de Statique*, par M. Poinsot).