NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 305-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__305_0>

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE)

1. *Déterminer le lieu géométrique des milieux des cordes d'une surface du second degré*

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

qui passent par un point donné (x', y', z').

L'une quelconque de ces cordes a pour équations

$$\frac{x - x'}{z - z'} = m, \tag{2}$$

$$\frac{y - y'}{z - z'} = n. \tag{3}$$

L'équation du plan diamétral qui la divise en deux parties égales est

$$m f'_{(x)} + n f'_{(y)} + f'_{(z)} = 0. \tag{4}$$

Donc, si l'on élimine m et n entre (2), (3) et (4), on aura l'équation du lieu géométrique cherché. L'élimination donne immédiatement

$$(x - x') f'_{(x)} + (y - y') f'_{(y)} + (z - z') f'_{(z)} = 0. \tag{5}$$

On voit que ce lieu est une surface semblable à la surface considérée (1), $f(x, y, z) = 0$, semblablement placée, et qui passe par le point donné (x', y', z').

Les points communs aux surfaces (1) et (5) appartiennent au plan représenté par l'équation

$$(x - x') f'_{(x)} + (y - y') f'_{(y)} + (z - z') f'_{(z)} - 2f(x, y, z) = 0, \tag{6}$$

qui est, comme on sait, du premier degré.

2. *Par un point (x', y', z') de l'hyperboloïde*

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on mène deux génératrices rectilignes de la surface, trouver l'équation du plan de ces deux droites.

En posant

$$(2) \qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mathrm{M}, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mathrm{N}, \quad 1 + \frac{y}{b} = \mathrm{M}', \quad 1 - \frac{y}{b} = \mathrm{N}'$$

et

$$(3) \qquad \frac{x'}{a} + \frac{z'}{c} = m, \quad \frac{x'}{a} - \frac{z'}{c} = n, \quad 1 + \frac{y'}{b} = m', \quad 1 - \frac{y'}{b} = n';$$

l'équation (1) de l'hyperboloïde devient

$$(4) \qquad \mathrm{MN} = \mathrm{M}'\mathrm{N}',$$

et l'on a

$$(5) \qquad mn = m'n',$$

puisque le point (x', y', z') est à la surface.

Les équations de l'une des deux génératrices menées par ce point sont

$$(6) \qquad \mathrm{M}n = \mathrm{M}'n',$$

$$(7) \qquad \mathrm{N}m = \mathrm{N}'m'.$$

L'autre génératrice a pour équations

$$(8) \qquad \mathrm{M}n = \mathrm{N}'m',$$

$$(9) \qquad \mathrm{N}m = \mathrm{M}'n'.$$

En additionnant (6) et (7), ou (8) et (9), il vient

$$(10) \qquad \mathrm{M}n + \mathrm{N}m = \mathrm{M}'n' + \mathrm{N}'m';$$

cette dernière équation représente évidemment le plan des deux génératrices.

Si l'on remplace dans (10), M, N, M', N' par leurs expressions (2), on a d'abord

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)n+\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)m=\left(1+\frac{y}{b}\right)n'+\left(1-\frac{y}{b}\right)m',$$

ou

$$\frac{x}{a}(n+m)+\frac{y}{b}(m'-n')+\frac{z}{c}(n-m)=n'+m'.$$

Mais, d'après les relations (3), on a

$$(n+m)=\frac{2x'}{a},\quad (m'-n')=\frac{2y'}{b},\quad (n-m)=-\frac{2z'}{c},$$

$$n'+m'=2;$$

donc

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=1$$

est l'équation demandée.

Remarque. On résoudra la même question pour le paraboloïde $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, en remarquant que, dans ce cas,

$$M=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\quad N=\frac{x}{a}-\frac{y}{b},\quad M'=2z,\quad N'=1,$$

$$m=\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b},\quad n=\frac{x'}{b}-\frac{y'}{b},\quad m'=2z',\quad n'=1;$$

l'équation (10) devient alors

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)n+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)m=2(z+z'),$$

ou

$$\frac{x}{a}(n+m)+\frac{y}{b}(n-m)=2(z+z').$$

Mais

$$(n+m)=+\frac{2x'}{a},\quad (n-m)=-\frac{2y'}{b};$$

on a donc

$$\frac{x'x}{a^2}-\frac{y'y}{b^2}=(z+z')$$

pour l'équation du plan des deux génératrices rectilignes du paraboloïde. G.