NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. CHALLIOT

Seconde solution de la question 396

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 9-11

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__9_1>

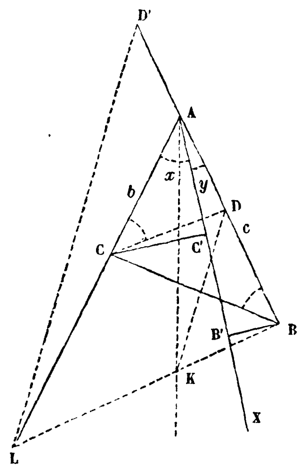
SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 396

(voir t. XVI, p. 428);

PAR M. P. CHALLIOT,

Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Par le sommet d'un triangle plan ABC, mener une droite telle, que les perpendiculaires BB', CC' abaissées



respectivement des sommets B et C sur cette droite, forment deux triangles rectangles ABB′, ACC′ équivalents.

Soit AX la droite demandée. Posons

$$\mathrm{CAX} = x, \quad \mathrm{BAX} = y,$$

nous avons

$$x + y = \mathrm{A}.$$

Cherchons leur différence.

On demande que

$$\mathrm{AC'}.\mathrm{CC'} = \mathrm{AB'}.\mathrm{BB'}.$$

Remplaçant ces lignes par leurs valeurs

$$b^2 \cos x \sin x = c^2 \cos y \sin y,$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y} = \frac{c^2}{b^2},$$

d'où

$$\frac{\sin 2x - \sin 2y}{\sin 2x - \sin 2y} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2},$$

et, d'après un théorème connu

$$\frac{\operatorname{tang}(x-y)}{\operatorname{tang} \mathrm{A}} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2}.$$

Pour construire, écrivons cette égalité sous la forme

$$\frac{\operatorname{tang}(x-y)}{\operatorname{tang} \mathrm{A}} = \frac{c - \frac{b^2}{c}}{c + \frac{b^2}{c}}.$$

Tirez CD de façon que l'angle ACD = ABC, les triangles semblables ACD, ACB donnent

$$\mathrm{AD} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{\mathrm{AB}} = \frac{b^2}{c}.$$

Prenez AD′ = AD, au point B faites un angle droit sur AB, joignez D′L, par le point D menez DK parallèle à

D′L, joignez AK; on aura

$$\frac{\text{tang BAK}}{\text{tang A}} = \frac{\text{BK}}{\text{BL}} = \frac{\text{BD}}{\text{BD}'} = \frac{c - \frac{b^2}{c}}{c + \frac{b^2}{c}}.$$

Donc

$$\text{BAK} = x - y.$$

Il ne reste plus qu'à mener la bissectrice AX de l'angle BAK, ce sera la droite demandée.

Remarque I. Si le triangle est isocèle, $b = c$, on a $x = y$. La bissectrice de l'angle du sommet répond évidemment à la question.

Remarque II. Si l'on demandait que les triangles, au lieu d'être équivalents, fussent dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, on arriverait à

$$\frac{\text{ang}\,(x - y)}{\text{tang A}} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2} \cdot \frac{m}{n},$$

ce qui se construirait d'une manière analogue.