NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

STHEPHANO GRILLO

Démonstration élémentaire des aires des deux ellipsoïdes de révolution (voir t. 1er, p. 80 et 524 ; t. III, p. 466)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 272-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__272_0>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DES AIRES DES DEUX ELLIPSOIDES DE RÉVOLUTION

(voir t. Ier, p. 80 et 524, t. III, p. 466),

D'APRÈS M. STHEPHANO GRILLO,
Ingénieur civil,
Membre de la Societé des architectes ingénieurs civils de Genève.

1. Soient M un point d'une courbe plane, et P la projection orthogonale de ce point sur un axe situé dans le plan de la courbe; si l'on prolonge l'ordonnée PM jusqu'à N, et que l'on prenne PN égale à la partie de la normale menée en M, interceptée par l'axe, le lieu du point N est une seconde courbe plane. Soient M′ et N′ deux autres points correspondants, on a alors ce lemme :

L'aire du trapèze mixtiligne PNN′ P′, *multipliée par* 2π, *est égale à l'aire engendrée par l'arc* MM′ *tournant autour de l'axe.*

La proposition est évidente lorsque MM′ est arc de cercle et l'axe un diamètre.

En décomposant les deux trapèzes mixtilignes MM′ PP′, NN′ PP′, en trapèzes élémentaires, on démontre le lemme par des considérations infinitésimales.

2. *Ellipse allongée.* Soient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

l'équation d'une ellipse;

$$\mathrm{AA}' = 2a = \text{grand axe},$$
$$\mathrm{BB}' = 2b = \text{petit axe},$$

et $a^2 - b^2 = c^2$. Le grand axe est l'axe de révolution.

La seconde courbe (celle des N) a pour équation

$$a^4 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^4 b^2,$$

seconde ellipse qui a même petit axe $2b$ que la première.

Si en A et A′ on mène des tangentes à la première ellipse, rencontrant la seconde en L et L′, d'après le lemme, l'aire de l'ellipsoïde est égale à l'aire du trapèze mixtiligne ALL′ A′, multipliée par 2π. Or, l'aire de ce trapèze est

$$ab\left(\cos\alpha + \frac{\alpha}{\sin\alpha}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} = \cos\alpha.$$

Donc l'aire de l'ellipsoïde allongée est

$$2\pi ab\left(\cos\alpha + \frac{\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

(T. I, p. 480.)

3. *Ellipsoïde aplati.* Même ellipse; mais prenons le petit axe BB′ pour axe de révolution. Dès lors la seconde courbe des N a pour équation

$$b^4 x^2 - a^2 y^2 = b^4 a^2,$$

hyperbole ayant $AA' = 2a$ pour axe focal.

Si par B et B′ on mène des tangentes à l'ellipse, coupant l'hyperbole en λ et λ', l'aire de l'ellipsoïde est égale à l'aire du trapèze mixtiligne B$\lambda\lambda'$ B′, multipliée par 2π. Or, l'aire du trapèze mixtiligne est

$$ab\left[\operatorname{séc}\alpha + \cot\alpha \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}a\right)\right].$$

(*Voir* t. V, p. 387.)

Donc l'aire de l'ellipsoïde aplati est

$$2\pi ab\left[\operatorname{séc}\alpha + \cot\alpha \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}a\right)\right].$$

(*Voir* t. I, p. 524.)

4. Le trapèze curviligne ALL′ A′ est évidemment plus

petit que le trapèze $B\lambda\lambda' B'$; donc l'aire de l'ellipsoïde allongé est moindre que celle de l'ellipsoïde aplati.

Remarque. Ces résultats sont consignés dans une brochure italienne de 17 pages in-8°, publiée à Genève en 1857; au début, l'auteur donne la théorie du *Stadia*, perfectionnée par le célèbre constructeur d'instruments astronomiques M. Porro, perfectionnement loué par M. de Senarmont (*Comptes rendus*, tome XXX, n° 8, 19 août 1850). Cet instrument a été inventé en 1778, par Green, opticien de Londres. Les ingénieurs français ne l'ont connu qu'en 1816, et Lostende l'a fait adopter en 1822.