NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HOUSEL

Détermination du sommet et des axes principaux d'un paraboloïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 223-229

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__223_1>

DÉTERMINATION DU SOMMET ET DES AXES PRINCIPAUX D'UN PARABOLOIDE;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Nous conserverons les notations et les relations données par M. Mention (*Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 209).

1. *Équation générale* :

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2B yz + 2B' xz + 2B'' xy \\ \qquad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0 \end{array} \right.$$

(axes quelconques).

2. *Équations d'un diamètre du paraboloïde*. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point; les équations du diamètre passant par ce point sont

$$\frac{x - x'}{k} = \frac{y - y'}{k'} = \frac{z - z'}{k''}.$$

3. *Équations du plan polaire du point dont les coordonnés sont* x', y', z' :

$$\begin{aligned} & x\,(A x' + B'' y' + B' z' + C) \\ + & y\,(B'' x' + A' y' + B z' + C') \\ + & z\,(B'' x' + B y' + A'' z' + C'') \\ + & C x' + C' y' + C'' z' + E = 0. \end{aligned}$$

4. *Équations de l'axe principal diamètre*. En écri-

vant que le diamètre est perpendiculaire au plan polaire, ce diamètre devient l'axe principal intérieur. Or, d'après les relations connues, on a, pour établir cette perpendicularité, les équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{Ax' + B''y' + B'z' + C}{h} &= \frac{B''x' + A'y' + Bz' + C'}{h'} \\ &= \frac{B'x' + By' + A''z' + C''}{h''}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} h &= k + k' \cos xy + k'' \cos xz, \\ h' &= k' + k \cos yx + k'' \cos yx, \\ h'' &= k'' + k \cos cx + k' \cos zy. \end{aligned}\right.$$

Les équations (2) sont celles de l'axe principal si x', y', z' représentent des coordonnées courantes.

5. *Transformation de l'équation du paraboloïde.* Quand l'équation générale (1) représente une surface qui n'a pas de centre unique, elle prend une forme particulière sur laquelle seront fondés tous les calculs suivants.

On a les relations

$$\begin{aligned} Ak + B''k' + B'k'' &= 0, \\ A'k' + Bk'' + B''k &= 0, \\ A''k'' + B'k + Bk' &= 0, \end{aligned}$$

(t. XVI, p. 211).

(On sait que le déterminant $m = 0$.)

A l'aide de ces relations, éliminant A, A', A'' dans l'équation (1), on trouve

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{B''}{kk'}(k'x - ky)^2 + \frac{B'}{kk''}(k''x - kz)^2 \\ &+ \frac{B}{k'k''}(k'z - k''y)^2 - 2Cx - 2C'y - 2C''z - E = 0. \end{aligned}\right.$$

Ce calcul est en défaut si l'on a $k = 0$. Alors l'équation précédente montre que l'on doit avoir en même temps $B'' = 0$ et $B' = 0$.

Les relations que nous avons écrites se réduisent à

$$A'k' + Bk'' = 0, \quad A''k'' + Bk' = 0,$$

et l'équation (1) devient

$$Ax^2 - \frac{B}{k'k''}(k'z - k''y)^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

Si de plus $k' = 0$, l'équation précédente ne peut subsister qu'en supposant $B = 0$. Mais la seconde des relations indiquées donne pour cette limite

$$\frac{Bk''}{k'} = -A,$$

et la troisième donne

$$A'' = 0;$$

on a donc

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

6. *Coordonnées du sommet.* Les équations (2), combinées avec l'équation (4) que nous supposerons accentuée, donnent les coordonnées du sommet.

A cet effet, entre les équations (2) éliminant y', observant que tous les termes qui contiennent le facteur hh se détruisent dans les coefficients de x' et de z', ainsi que dans le terme indépendant; enfin, supprimant le facteur commun h'', il reste

$$\begin{aligned}
&x'[h(BB'' - A'B') + h'(B'B'' - AB) + h''(AA' - B''^2)]\\
&+ z'[h(B^2 - A'A'') + h'(A''B'' - BB') + h''(A'B' - BB'')]\\
&+ h(BC' - A'C'') + h'(B''C'' - BC) + h''(A'C - B''C') = 0.
\end{aligned}$$

Les coefficients de x' et de z' peuvent se modifier au moyen des relations obtenues t. XVI, p. 210, et en remarquant que $m = 0$. Alors le coefficient de x' sera

$$\frac{k''}{L}(hk + h'k' + h''k''),$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} &hk + h'k' + h''k'' \\ &= k^2 + k'^2 + k''^2 + 2kk'\cos xy \\ &\quad + 2kk''\cos xz + 2k'k''\cos yz = D^2. \end{aligned}$$

D est la diagonale du parallélipipède que l'on obtient en portant sur les axes à partir de l'origine les trois longueurs k, k', k''.

De même le coefficient de z' sera $\frac{K}{L} \cdot D^2$.

Si donc nous posons

$$R' = \frac{L[h(A'C'' - BC') + h'(BC - B''C'') + h''(B''C' - A'C)]}{D^2},$$

ainsi que les valeurs analogues pour R et R'', il vient

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} k'z' - k''y' &= R, \\ k''x' - kz' &= R', \\ ky' - k'x' &= R''. \end{aligned} \right.$$

Ici R, R', R'' sont des quantités connues.

Transportant ces valeurs dans l'équation (4) accentuée, comme nous l'avons dit, on obtient

$$\frac{B''R''^2}{kk'} + \frac{B'R'^2}{kk''} + \frac{BR^2}{k'k''} = 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E,$$

ou enfin

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &k''B''R''^2 + k'B'R'^2 + kBR^2 \\ &= kk'k''(2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E) \end{aligned} \right.$$

En combinant cette dernière équation avec deux quelconques des équations (2), on a les valeurs x', y', z' des coordonnées du sommet, puisque toutes ces relations sont du premier degré.

7. Comme dans l'équation (6) l'expression

$$Cx' + C'y' + C''z'$$

est égale à une quantité connue, nous verrons, en combinant cette équation avec les équations (5), que le déterminant de x', y' et z' est

$$Ck + C'k' + C''k''.$$

Si donc

$$(7) \qquad Ck + C'k' + C''k'' = 0,$$

nous aurons un des cas particuliers que présentent les surfaces dénuées de centre, ou même une de celles qui ont une infinité de centres, car nous avons seulement supposé $m = 0$, ce qui n'exclut que les surfaces ayant un centre unique. Nous n'insisterons pas sur ces circonstances.

8. Dans le cas où l'on a

$$k = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0,$$

on verra directement, en comparant les relations correspondantes

$$A'k' + Bk'' = 0, \quad A''k'' + Bk' = 0$$

avec les équations (2) qui deviennent alors

$$\frac{Ax' + C}{h} = \frac{A'y' + Bz' + C'}{h'} = \frac{By' + A''z' + C''}{h''},$$

que x' est connu ainsi que $k'z' - k''y'$ en transportant ces valeurs dans l'équation

$$Ax'^2 - \frac{B}{k'k''}(k'z' - k''y')^2 + 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E = 0,$$

on reconnaîtra que $C'y' + C''z'$ est aussi une quantité connue, et que le déterminant de y' et de z' est

$$C'k' + C''k'',$$

ce qui permettra encore de distinguer certains cas particuliers. En outre, on trouvera, après quelques réductions,

$$Ax' + C = \frac{h(C'k' + C''k'')}{h'k' + h''k''}.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, il reste

$$x = -\frac{C}{A},$$

car la supposition $k = 0$ donne alors

$$h = 0.$$

Enfin si l'on a de plus

$$k' = 0,$$

ce qui donne

$$B = 0,$$

les équations (2) deviennent

$$\frac{Ax' + C}{h} = \frac{A'y' + C'}{h'} = \frac{C''}{h''},$$

ce qui détermine x' et y' : il suffira donc de transporter ces valeurs dans l'équation

$$Ax'^2 + A'y'^2 + 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E = 0,$$

pour trouver z'.

9. *Équations des plans et des axes principaux.* En transportant dans l'équation du plan polaire les valeurs précédentes de x', y', z', on aura le plan tangent qui passe par le sommet, c'est-à-dire le plan principal extérieur.

On connaît déjà les équations de l'axe diamétral passant par le sommet. Pour avoir celles des deux autres axes, observons que l'équation en s (t. XVI, p. 215) se réduit alors au second degré, puisque $m = 0$ donne une racine nulle. De plus, les expressions

$$\mu = \frac{(s - A')(s\cos xz - B') - (s\cos yz - B)(s\cos xy - B'')}{(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s - A')},$$

$$\nu = \frac{(s - A)(s\cos yz - B) - (s\cos xz - B')(s\cos xy - B'')}{(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s - A')},$$

qui se déduisent facilement des deux premières formes du quotient s écrites à la page indiquée donnent pour les deux valeurs de s les valeurs correspondantes de μ et ν, et, par conséquent, les directions des axes extérieurs; comme ils passent par le sommet, on a donc leurs équations, qui feront connaître celles des plans principaux intérieurs.