VANNSON

Formules fondamentales de l'analyse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 209-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__209_1>

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 163);

PAR M. VANNSON.

PROBLÈME. *Étant donnée sur la sphère une courbe dont l'équation est*

$$\varphi(xy) = 0,$$

x *et* y *représentant les tangentes des coordonnées d'un de ses points, trouver l'équation de l'arc de grand cercle tangent à cette courbe en un point donné.*

Si nous appelons a le coefficient de x dans l'équation d'une sécante, nous aurons, quand $x'' = x'$, etc.,

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

et la limite de ce rapport sera le coefficient de x dans l'équation de la tangente; on aura donc, comme sur un plan, α désignant la limite de a,

$$\alpha = -\frac{\varphi'_x(x'y')}{\varphi'_y(x'y')}.$$

L'équation demandée sera donc

$$(y - y')\,\varphi'_y(x'y') + (x - x')\,\varphi'_x(x'y') = 0.$$

On voit que la méthode consiste à passer d'un point de la courbe au point infiniment voisin en donnant des accroissements infiniment petits aux tangentes des coordonnées, au lieu de les attribuer aux coordonnées elles-mêmes, ce qui serait beaucoup moins simple.

Si pour des valeurs particulières

$$\varphi'_x = 0, \quad \varphi'_y = 0,$$

α se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ce qui indique un point multiple, α se trouve alors comme sur un plan par l'équation du second degré

$$\alpha^2\,\varphi''_y(x'y') + 2\alpha\varphi'^{x}_{\prime y}(x'y') + \varphi''_x(x'y') = 0.$$

Si les racines sont réelles, on a un point double ; dans le cas contraire, un point isolé.

Soit, par exemple, la courbe représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

que nous pouvons appeler le folium sphérique, on trouve pour l'origine

$$\alpha = \frac{0}{0},$$

et l'équation du second degré donne une racine nulle et une racine infinie. La courbe est donc à l'origine tangente aux deux axes. Le point où la courbe coupe l'arc bissecteur de l'angle des axes est donné par l'équation

$$x = \frac{3}{2},$$

et on trouve aisément que l'arc tangent en ce point est perpendiculaire à l'arc bissecteur. Sur un plan, on chercherait les points où la tangente est parallèle à la bissectrice. Ici la question analogue consiste à trouver une circonférence tangente qui coupe l'arc bissecteur à 90 degrés de l'origine; la latitude de ce point étant 45 degrés, on posera

$$1 = \frac{x_1^2 - y_1}{x' - y_1^2},$$

ou, en général

$$\varphi'_x + \varphi'_y = 0.$$

Cette équation, combinée avec celle de la courbe, donne les points cherchés.

Le folium sur un plan a une asymptote, c'est-à-dire une tangente pour laquelle les coordonnées du point de contact sont infinies. Nous allons résoudre la question analogue sur la sphère pour une courbe quelconque. D'abord, pour avoir le coefficient de x dans l'équation de la tangente cherchée, il faut trouver la limite vers laquelle tend l'expression $-\frac{\varphi'_x (x'y')}{\varphi'_y (x'y')}$ quand x' et y' deviennent infinies. Pour cela, divisons par x' les deux membres de l'équation de la tangente et supposons ensuite x' infini, nous aurons

$$\lim \left(-\frac{\varphi'_x (x'y')}{\varphi'_y (x'y')}\right) = \lim \left(\frac{y'}{x'}\right).$$

Cette limite se trouvera comme dans la question des asymptotes sur un plan. Soit α l'expression supposée réelle qu'on aura trouvée pour limite; le terme indépendant de l'équation cherchée sera la limite vers laquelle tend le binôme $y' - \alpha x'$ quand x' et y' deviennent infinies. Le calcul ne différera donc en rien de celui qu'on ferait pour la détermination des asymptotes dans une courbe plane.

Dans le cas du folium, on trouve

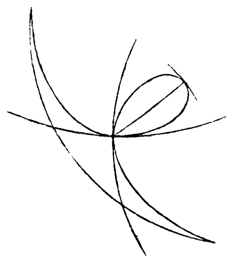
$$\alpha = -1 \quad \text{et} \quad b = -1;$$

l'équation de la tangente demandée est donc

$$y + x + 1 = 0.$$

On a vu que la latitude du point de contact, situé à 90 degrés de l'origine, était égale au coefficient de x, c'est-à-dire à -1; il est donc à 45 degrés au-dessous de l'axe des x; d'ailleurs la circonférence dont nous avons l'équation coupe les axes à 45 degrés du côté des coordonnées négatives. Ces remarques et celles qui ont précédé permettent de construire le folium sphérique. Remar-

Fig. 1.



quons toutefois que comme on peut ajouter 180 degrés à un arc sans changer sa tangente, à tout point qu'on aura construit d'après l'équation, correspondra un autre point diamétralement opposé. Pour éviter la confusion, nous n'avons représenté sur la figure qu'une moitié de la courbe.

Appliquons maintenant l'équation générale des tangentes à une courbe quelconque du deuxième degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

L'équation de la circonférence tangente à la courbe en un point donné sera évidemment

$$y(2Ay' + Bx' + D) + x(2Cx' + By' + E)$$
$$+ Dy' + Ex' + 2F = 0.$$

Les axes peuvent être rectangulaires ou obliques. Si on les suppose rectangulaires et qu'on demande les tangentes perpendiculaires à l'axe des x, l'équation devra se réduire à la forme

$$x = h;$$

on aura donc

$$2Ay' + Bx' + D = 0.$$

Les points de contact seront donc à la rencontre de la circonférence représentée par cette équation avec la courbe. Si l'on résout l'équation de la courbe par rapport à y, on reconnaîtra facilement que tout arc de la courbe perpendiculaire aux x a son centre sphérique de moyennes distances sur la circonférence qui passe par les points de contact.

Si l'on veut mener une tangente par un point situé arbitrairement sur la sphère, on aura, en appelant x'', y'' les tangentes des coordonnées de ce point,

$$y'(2Ay'' + bx'' + D) + x'(2Cx'' + By'' + E)$$
$$+ Dy'' + Ex'' + 2F = 0$$

et

$$\varphi(x' y') = 0.$$

La première de ces équations, en y regardant y' et x' comme des variables, représente une circonférence passant par les points de contact, et comme elle peut être construite, quand même les coordonnées x', y' seraient imaginaires, nous appellerons cette circonférence la polaire du point x'', y''. On peut démontrer, comme pour les courbes planes, que si des points sont situés sur une même circonférence de grand cercle, leurs polaires passent par un même point qui a pour polaire la circonférence donnée, et réciproquement.

Supposons que D et E soient nuls, cas dans lequel la courbe est rapportée à son centre O, et soit x'' la tangente de l'abscisse d'un point A sur l'axe des x, la polaire de ce point coupera l'axe en un point B représenté par l'équation

$$x = -\frac{F}{Cx''}.$$

Soit C l'intersection de la courbe avec l'axe, on trouve

$$\text{tang}^2\,\text{OC} = \frac{F}{C},$$

donc

$$\text{tang}\,\text{OA} \times \text{tang}\,\text{OB} = \text{tang}^2\,\text{OC}.$$

D'où l'on voit que la polaire d'un point coupe la circonférence qui joint le centre à ce point à une distance du centre, dont la tangente, multipliée par celle de la distance du point au centre, égale le carré de la tangente du rayon passant au point donné.

Si

$$x'' = \infty,$$

on a

$$x = 0,$$

d'où l'on voit que la polaire d'un point à 90 degrés du centre passe par le centre ; en d'autres termes, la circonférence polaire du centre est un grand cercle décrit de ce centre comme pôle.

Réciproquement, si les polaires des deux points A et B, non situés sur un même diamètre, passent en un point O situé à 90 degrés de A et de B, le point O sera centre de la courbe. En effet, prenons le point O comme origine et faisons passer les axes l'un par A, l'autre par B. La polaire du point A qui a pour coordonnées

$$y' = 0, \quad x' = \frac{1}{0}$$

sera

$$By + 2Cx + E = 0.$$

La polaire de B sera de même

$$Bx + 2Ay + D = 0,$$

puisqu'elles passent par l'origine, on a

$$D = 0, \quad E = 0;$$

donc le point O est le centre de la courbe.

Remarque. On voit que le mot pôle en géométrie sphérique a deux significations, d'où pourrait résulter une certaine confusion dans les énoncés. Pour l'éviter, nous appellerons pôle d'une circonférence de grand cercle le point dont cette circonférence est la polaire par rapport à une courbe donnée, et nous appellerons le point situé à 90 degrés des points d'une circonférence le pôle sphérique de cette circonférence.

PROBLÈME. *Étant donnée l'équation générale des courbes du second degré, prouver que ces courbes ont un centre et trouver ses coordonnées.* (BORGNET.)

En admettant dans le théorème qui précède l'existence du centre, nous avons vu qu'il avait pour polaire une circonférence dont ce centre lui-même était le pôle sphérique. Soient donc x', y' les tangentes des coordonnées d'un point jouissant de cette propriété. La polaire de ce point a pour équation

$$y(2Ay' + Bx' + D) + x(2Cx' + By' + E) + Dy' + Ex' + 2F = 0.$$

D'un autre côté, la circonférence ayant ce même point pour pôle sphérique est, comme on l'a vu plus haut,

$$yy' + xx' + 1 = 0.$$

Ecrivons que ces deux équations représentent la même ligne. Nous aurons

$$\frac{2Ay' + Bx' + D}{y'} = Dy' + Ex' + 2F$$

et

$$\frac{2Cx' + By' + E}{x'} = Dy' + Ex' + 2F,$$

équations que nous avons déjà obtenues par la transformation des coordonnées.

On peut aussi trouver la direction des axes de la courbe sans employer les formules de transformation par la considération des polaires. Pour cela, soient y' et x' les tangentes des coordonnées d'un point qnelconque de l'un des axes, la polaire de ce point devra être perpendiculaire à l'arc qui joint ce point à l'origine. Or le coefficient de x pour le dernier arc est $\frac{x'}{y'}$ et pour l'arc polaire c'est $-\frac{By' + 2Cx'}{Bx' + 2Ay'}$; or il est aisé de voir que la condition exprimant que deux arcs sont rectangulaires, l'un d'eux passant par l'origine, est la même que sur le plan ; on aura donc

$$\frac{y'}{x'}\left(\frac{By' + 2Cx'}{Bx' + 2Ay'}\right) = 1$$

ou, si l'on pose $\frac{y'}{x'} = A'$,

$$A'^2 + 2\left(\frac{C - A}{B}\right)A' - 1 = 0;$$

c'est aussi ce que donneraient les formules de transformation. Il est aisé de voir que les coefficients de l'équation transformée se calculeront par les mêmes formules que pour une courbe plane.

Problème. *Étant donnée l'équation générale du second degré, trouver les conditions pour qu'elle représente un cercle.*

Remarquons d'abord que si l'on prend un point quelconque A à 90 degrés du pôle sphérique de ce cercle, la polaire du point A aura ce même point pour pôle sphérique; réciproquement, si deux points A et B sont à 90 degrés du centre d'une courbe du second degré, et que les polaires de A et de B aient ces mêmes points pour pôles sphériques, la courbe est un cercle, si toutefois la distance des points A et B n'est pas égale à un quadrant; nous nous bornerons à l'énoncé de cette réciproque qui se démontre facilement.

Cela posé, soient x', y' les coordonnées du centre de la courbe, les points à 90 degrés du centre sont sur une circonférence qui a pour équation

$$yy' + xx' + 1 = 0.$$

Elle coupe l'axe des x en un point A qui a pour abscisse $-\frac{1}{x_1}$ et l'autre axe en un point B qui a pour ordonnée $-\frac{1}{y_1}$. Nous supposerons que les points A et B ne sont pas distants de 90 degrés; si cela avait lieu dans un exemple particulier, on pourrait remplacer un des points A et B par un autre point de la circonférence qui les joint

La polaire de A a pour équation

$$y(\mathrm{D}x' - \mathrm{B}) + x(\mathrm{E}x' - 2\mathrm{C}) + 2\mathrm{F}x' - \mathrm{E} = 0,$$

et la circonférence dont A est le pôle sphérique a pour équation

$$x = x'.$$

Pour que ces équations représentent la même circonférence, il faut qu'on ait

$$x' = \frac{D}{B} \quad \text{e} \quad \frac{E - 2Fx'}{Ex' - 2C} = 0,$$

d'où

$$\frac{DE - 2FB}{B} = \frac{EB - 2CD}{D};$$

en opérant de même pour le point B, on trouve

$$y' = \frac{B}{E},$$

et pour seconde condition

$$\frac{BD - 2AE}{E} = \frac{DE - 2FB}{B}.$$

Ces conditions sont établies dans l'ouvrage de M. Borgnet par une méthode toute différente et très-simple. Nous avons indiqué celle-ci comme une application de plus de la théorie des polaires.

Théorème. *Si par un point* A *on mène un arc de grand cercle qui coupe en* B *et* C *la courbe et en* D *la polaire du point* A, *les quatre points* A, B, C, D *seront harmoniques.*

Prenons le point A pour origine, sa polaire aura pour équation

$$Dy + Ex + 2F = 0;$$

l'intersection de cette polaire avec l'axe sera donnée par l'équation

$$x = -\frac{2F}{E},$$

et les intersections de la courbe avec cet axe par l'équation

$$Cx^2 + Ex + F = 0.$$

Appelant x', x'' les deux racines, on aura

$$\frac{x' x''}{x' + x''} = -\frac{F}{E},$$

donc

$$2x' x'' = x(x' + x'')$$

ou

$$x(x'' - x') = x'(x - x'').$$

Si nous remplaçons x, x', x'' par des tangentes et la différence des tangentes sur deux arcs par le sinus de leur différence divisé par le produit de leurs cosinus, nous aurons la relation indiquée. Donc les quatre points sont harmoniques.

Théorème. *Si par un point quelconque on mène deux arcs sécants à une courbe sphérique du second degré et qu'on joigne un point de section sur la première à un point de section sur la seconde, le lieu du point de rencontre des arcs obtenus sera une circonférence de grand cercle polaire du point donné.*

Se démontre comme sur un plan et donne lieu aux mêmes applications, entre autres : Mener par un point connu des tangentes à une courbe sphérique du second degré.

Théorème. *Si trois courbes du second degré ont deux points communs et qu'elles se coupent deux à deux en d'autres points* A, A', B, B', C, C', *les trois circonférences de grand cercle passant la première par* A, A', *la deuxième par* B, B', *la troisième par* C, C', *auront un point commun.*

Se démontre comme sur un plan.

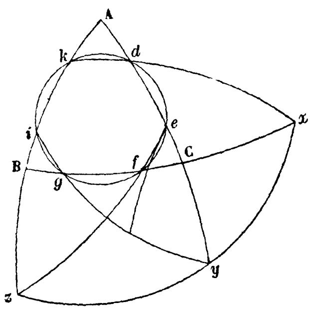
De là on peut tirer une démonstration du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une courbe du deuxième degré ; le théorème inverse (de Brianchon) sur l'hexagone circonscrit se démontrera par les polaires ; les corollaires et applications de ces théorèmes seront les mêmes que sur un plan, entre autres :

Si un triangle coupe une courbe du second degré en six points, on aura, en sous-entendant le mot sinus devant chaque arc,

$$Ad.Ae.Cf.Cg.Bi.Bk = Ak.Ai.Bg.Bf.Ce.Cd.$$

En effet, si l'on prolonge l'arc kd jusqu'à la rencontre de

FIG. 2.



Bc au point x, ef jusqu'à la rencontre de AB en z et ig jusqu'à celle de AC en y, d'après le théorème de l'hexagone, les trois points x, y, z sont sur un grand cercle. Ce cercle coupant les côtés du triangle ABC donne (transversales) la relation

$$\frac{Bx}{Cx} \cdot \frac{Cy}{Ay} \cdot \frac{Az}{Bz} = 1.$$

L'arc kd coupant le même triangle donne

$$\frac{Ad}{dC} \cdot \frac{Cx}{Bx} \cdot \frac{Bk}{Ak} = 1,$$

on a de même

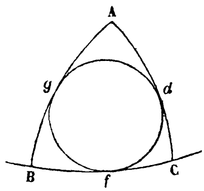
$$\frac{Ae}{Ce} \cdot \frac{Cf}{Bf} \cdot \frac{Bz}{Az} = 1,$$

et enfin

$$\frac{Cg}{Bg} \cdot \frac{Bi}{Ai} \cdot \frac{AY}{BY} = 1.$$

Si l'on multiplie ces quatre équations membre à membre,

FIG. 3.



on trouve la relation demandée. Si l'on suppose le triangle circonscrit, on trouve

$$Ad . Cf . Bg = Ag . Bf . Cd,$$

d'où l'on peut conclure que les trois arcs joignant chaque sommet au point de contact opposé concourent au même point. Les polaires donnent un théorème inverse.

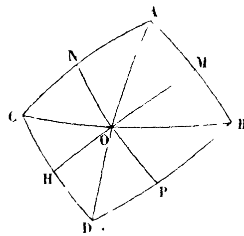
Remarque. Le théorème sur le produit des segments dans un triangle coupé par une conique s'étend à un quadrilatère en le décomposant en deux triangles, par suite à un polygone d'un nombre quelconque de côtés. Si on l'applique à un quadrilatère circonscrit, on trouve que le produit des sinus des quatre segments non contigus égale le produit des sinus des quatre autres segments.

Corollaire. De la relation précédente, on peut conclure cette autre propriété du quadrilatère circonscrit à une courbe du second degré : Les deux diagonales et les arcs qui joignent deux points de contact opposés forment un faisceau harmonique.

Soient θ l'angle des diagonales, α l'angle MOB, α' l'angle NOA ; posons aussi

$$OB = a, \quad OC = a', \quad OA = b, \quad OD = b'.$$

Fig 4.



Appliquant aux deux triangles AOM, DOM le principe des sinus proportionnels, nous aurons, en supprimant le mot sinus pour abréger,

$$\frac{AM}{BM} = \frac{(\theta - \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{b}{a}, \quad \frac{BP}{DP} = \frac{\alpha'}{(\alpha' - \theta)}, \ldots;$$

de même pour les autres côtés. Multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\alpha' - \theta)},$$

ce qui est bien la relation exprimant que les quatre arcs forment un faisceau harmonique. Il en résulte que si l'on représente l'arc HM par l'équation

$$y = Ax,$$

en prenant pour axes les diagonales, l'arc MP aura pour équation

$$y = -Ax.$$

Cette remarque nous servira plus loin pour obtenir l'équation générale des coniques tangentes à quatre circonférences données.