PAINVIN

Discussion des lignes et surfaces du second ordre (voir t. XV, p. 322 et 386 ; t. XVI, p. 207 et 294)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 130-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__130_1>

DISCUSSION DES LIGNES ET SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir t XV, p. 322 et 386; t. XVI, p. 207 et 294);

PAR M. PAINVIN,
Professeur, Docteur ès Sciences mathématiques.

I.

LIGNES DU SECOND ORDRE.

La discussion des courbes du second ordre, c'est-à-dire la connaissance du genre et de l'espèce de la courbe représentée par une équation du second degré, se déduit très-facilement de la considération des signes de l'*invariant* et du *déterminant*.

Soit, en adoptant la notation ordinaire,

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation générale des courbes du second degré; on pourra toujours supposer $A > 0$.

Je rends homogène l'équation (1), ce qui donne

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x, y, z) \\ &= Ax^2 + Cy^2 + Fz^2 + 2Bxy + 2Dxz + 2Eyz = 0, \end{aligned} \right.$$

et j'égale à zéro les dérivées du premier membre de l'équation par rapport aux trois variables x, y, z; on obtient ainsi

$$\begin{aligned} Ax + By + Dz &= 0, \\ Bx + Cy + Ez &= 0, \\ Dx + Ey + Fz &= 0. \end{aligned}$$

Le déterminant des coefficients du système de ces trois équations est ce qu'on appelle le *discriminant* de la fonction φ; le rôle que joue cette quantité dans la question actuelle justifie pleinement cette dénomination.

On aura donc, en désignant par Δ le discriminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Je considère en outre le déterminant du second ordre

(Invariant.) $$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \ (*)$$

qui peut s'écrire immédiatement d'après l'inspection du discriminant, et qui n'est autre chose que le dénominateur commun des coordonnées du centre : on lui donne le nom d'*invariant*.

Or, par une analyse très-simple que je supprime ici, on arrive aux conséquences suivantes :

(*) $\delta = \Delta'_F$; l'accent désigne une dérivee par rapport à la lettre F

TM.

I^er^ CAS. — *Invariant positif;* genre *ellipse.*

Discriminant	négatif....	Ellipse réelle.
	nul.......	Point.
	positif ...	Ellipse imaginaire.

II^e^ CAS. — *Invariant négatif;* genre *hyperbole.*

Discriminant	différent de zéro.	Hyperbole.
	nul...........	Deux droites qui se coupent.

III^e^ CAS. — *Invariant nul;* genre *parabole.*

Discriminant	différ. de zéro.	Parabole.	
	nul	Deux dr. parall.	réelles, si $d < 0$,
			se confond^t^, si $d = 0$,
			imaginaires, si $d > 0$.

d représente un troisième déterminant auxiliaire

$$\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$$

qui se déduit immédiatement du discriminant en prenant les quatre lettres aux sommets du carré.

II.

SURFACES DU SECOND ORDRE.

Je fais reposer sur des considérations analogues la discussion des surfaces du second degré.

Soit

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy$$
$$+ 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + D = 0$$

l'équation générale des surfaces du second ordre, qui, rendue homogène, devient

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Dt^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt = 0.$$

En égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de cette dernière équation par rapport aux variables x, y, z, t, on obtiendra les quatre équations

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + Ct &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C't &= 0, \\ B'x + By + A''z + C''t &= 0, \\ Cx + C'y + C''z + Dt &= 0. \end{aligned}$$

A est toujours supposé positif.

Le déterminant de ce système est le *discriminant* de la fonction φ.

On aura donc, en désignant par Δ ce discriminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Je considérerai en outre les deux déterminants du troisième ordre :

$$(1^{\text{er}}\ \text{invar.}) \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \qquad \delta' = \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} \quad (*)$$

et les deux déterminants du second ordre :

$$(2^{\text{e}}\ \text{invar.}) \quad d = \begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} \qquad d' = \begin{vmatrix} A & C \\ C & D \end{vmatrix}$$

(*) $\delta = \Delta'_{D}$, $\delta' = \Delta'_{A''}$, $d = \delta'_{A'} = \Delta''_{DA''}$, $d' = \Delta''_{A''A'}$.

Ces quatre déterminants peuvent s'écrire à la seule inspection du discriminant, comme il est indiqué par les lignes ponctuées. Je donnerai aux déterminants δ et d les noms de *premier* et *second* invariant; le premier invariant est le dénominateur commun des coordonnées du centre.

Ceci posé, la discussion générale des surfaces du second ordre pourra se résumer de la manière suivante.

J'ai supprimé toute démonstration, pensant que les méthodes de discussion connues étaient bien suffisantes pour établir facilement les propositions énoncées dans cette note; j'ajouterai cependant que la décomposition en carrés est la méthode qui m'a semblé conduire le plus rapidement à ces résultats, si on la dirige convenablement en faisant intervenir quelques propriétés simples des déterminants.

1° — PREMIER INVARIANT δ DIFFÉRENT DE ZÉRO.

1re FAMILLE. — Surfaces à centre unique

Ier CAS. — *Les deux invariants δ et* d *tous deux positifs;* genre *ellipsoïde.*

Discriminant	négatif...	Ellipsoïde réel.
	nul...	Point.
	positif..	Ellipsoïde imaginaire.

IIe CAS. — *Le premier invariant δ étant différent de zéro et n'étant pas positif en même temps que le second invariant* d, genre *hyperboloïde.*

Discriminant	positif...	Hyperboloïde à une nappe.
	négatif..	Hyperboloïde à deux nappes.
	nul...	Cône.

d peut être quelconque, positif, négatif ou nul.

2°. — PREMIER INVARIANT δ NUL.

2^e FAMILLE. — Surfaces dénuées de centres ou possédant une infinité de centres.

I^er CAS. — *Le premier invariant δ nul et le discriminant Δ différent de zéro;* genre *paraboloïde.*

SECOND INVARIANT *d différent de zéro :*

Discriminant	négatif...	Paraboloïde elliptique.
	positif...	Paraboloïde hyperbolique.

SECOND INVARIANT *d nul :*

Discriminant positif ou négatif.. Cylindre parabolique.

II^e CAS. — *Le premier invariant δ et le discriminant Δ étant nuls;* genre *cylindrique.*

SECOND INVARIANT *d différent de zéro.*

$d > 0$,	$\delta' > 0$...	Cylindre elliptique imaginaire.
$d > 0$,	$\delta' < 0$...	Cylindre elliptique.
$d < 0$,	$\delta' \gtrless 0$....	Cylindre hyperbolique.
$d > 0$,	$\delta' = 0$...	Deux plans imaginaires qui se coupent.
$d < 0$,		Deux plans qui se coupent.

SECOND INVARIANT *d nul.*

$d' > 0$....	Deux plans parallèles imaginaires.
$d' = 0$....	Deux plans qui se confondent.
$d' < 0$....	Deux plans parallèles.

Dégageant cette discussion des cas particuliers, on pourra résumer ainsi les signes caractéristiques des différents genres de surfaces.

Genre ellipsoïde. Les deux invariants δ et d sont tous deux *positifs; d* ne doit pas être nul.

Genre hyperboloïde. Le premier invariant δ est différent de zéro et n'est pas positif en même temps que le second invariant d, qui d'ailleurs peut être quelconque.

Genre paraboloïde. Le premier invariant δ est nul et le discriminant Δ est différent de zéro.

Genre cylindrique. Le premier invariant et le discriminant sont tous deux nuls.

Note du Rédacteur. C'est sans doute pour ne pas trop s'éloigner des usages ordinaires que le savant auteur n'a pas employé la notation si expressive, si mnémonique des coefficients et des variables à *indices* :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$

$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 = 0 \text{ ligne},$$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$$

$$+ 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{44}x_4^2 = 0 \text{ surface}.$$