

COMBESURE

Solution de la question 374

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 297-299

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__297_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 374

(voir p. 178);

PAR M. COMBESURE,
Professeur à Montpellier.

Les déterminants

$$u = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad v = s \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \quad w = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

s'annulent pour

$$\begin{aligned} x &= \alpha, \\ y &= \beta, \\ z &= \gamma, \end{aligned}$$

et pour

$$\begin{aligned} x &= \alpha', \\ y &= \beta', \\ z &= \gamma', \end{aligned}$$

à cause de l'identité de deux lignes dans chacun d'eux pour chacune de ces substitutions.

La conique

$$uw - v^2 = 0$$

passé donc par les deux points $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$. Comme

$$u = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} ax + by + cz & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

au point commun à la conique et à la droite

$$ax + by + cz = 0 \text{ (*)},$$

on a

$$u_1 = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a + b^2 + c^2 & b & c \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & \beta' & \gamma' \\ a^2 + b^2 + c^2 & b & c \end{vmatrix}$$

$$v_1 = \frac{s}{a} \begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

ou

$$au_1 = Ay - Bz,$$

$$aw_1 = A'y - B'z,$$

$$av_1 = sCy - sDz,$$

en faisant

$$A = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta + c\gamma & \gamma \\ a^2 + b^2 + c^2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & \gamma \\ a^2 + b^2 & c \end{vmatrix}$$

$$B = \dots\dots\dots$$

En exprimant que l'équation

$$u_1 w_1 - v_1^2 = 0$$

est décomposable en deux facteurs linéaires en y et z ,

on a

$$(AB' - BA')^2 = 4s^2(CB' - DA')(AD - BC),$$

(*) Sur la page 178 il faut remplacer γ, u, v par a, b, c

ce qui, par la règle de multiplication des déterminants, se réduit en supprimant un facteur commun a^3 et extrayant la racine carrée

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)I \\ & = \pm 2s \sqrt{(a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha' + b\beta' + c\gamma')} I, \end{aligned}$$

où

$$I = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Pour que la droite soit tangente, il faut donc que

$$I = 0$$

et s sera indéterminé, ou, si I n'est pas nul, que

$$2s = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\pm \sqrt{(a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha' + b\beta' + c\gamma')}}.$$

Une proposition analogue doit avoir lieu pour la surface du troisième ordre $uvw - t^3 = 0$, où

$$u = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad u' = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$v = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad t = s \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix}$$

et le plan $ax + by + cz + du = 0$.