

ARTHUR CAYLEY

**Note sur un problème d'analyse  
indéterminée**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16  
(1857), p. 161-166

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__161_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## NOTE

Sur un problème d'analyse indéterminée;

PAR M. ARTHUR CAYLEY.

Euler a donné dans le Mémoire : *Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite solvendi* (*Comment. Arith. Coll.*, t. II, p. 263) la solution que voici de l'équation indéterminée

$$(1) \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \zeta y^2 + \eta y + \vartheta.$$

En supposant que l'on ait la solution  $x = a$ ,  $y = b$  de manière que

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = \zeta b^2 + \eta b + \vartheta,$$

et en posant

$$s = \sqrt{\alpha r^2 + 1},$$

où  $r$  est une quantité quelconque, l'équation sera satisfaite par les valeurs

$$x = sa + \zeta rb + \frac{(s-1)\beta}{2\alpha} + \frac{1}{2}r\eta,$$

$$y = \alpha ra + sb + \frac{(s-1)\eta}{2\zeta} + \frac{1}{2}r\beta;$$

en effet, on voit sans peine que ces valeurs donnent identiquement

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma - (\zeta y^2 + \eta y + \vartheta) \\ = \alpha a^2 + \beta a + \gamma - (\zeta b^2 + \eta b + \vartheta) = 0. \end{cases}$$

En supposant de plus que les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\vartheta$  soient des nombres entiers tels, que  $\alpha\zeta$  soit un en-

tier positif non carré, on peut toujours déterminer le nombre entier  $r$  de manière que  $s$  soit un nombre entier; cela étant, et en supposant que  $a, b$  soient des entiers, il est évident que  $x, y$  seront des nombres rationnels. Euler a de plus remarqué que l'on peut toujours faire en sorte que  $x, y$  soient des nombres entiers. En effet, si les formules donnent  $x = a', y = b'$  des valeurs non entières, en substituant dans les formules au lieu de  $a, b$  les valeurs  $a', b'$ , on obtiendra pour  $x, y$  des valeurs entières; cela se vérifie sans peine.

L'équation indéterminée (2) rentre dans celle-ci

$$(3) \quad (a, b, c, f, g, h) (x', y', z')^2 = (a, b, c, f, g, h) (x, y, z)^2,$$

(Voir note I.)

en supposant que la forme ternaire

$$(a, b, c, f, g, h) (x, y, z)^2$$

se transforme en elle-même au moyen d'une substitution linéaire quelconque. On peut supposer que cette substitution soit telle, que l'on ait  $z' = z$ ; cela étant, en écrivant  $z' = z = 1$  et en mettant de plus  $h = 0$ , l'équation (3) se réduit évidemment à une forme telle que l'équation (2). Or on peut trouver par la méthode générale de M. Hermite la solution convenable de l'équation (3). En supposant, comme à l'ordinaire,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= bc - f^2 \dots, & \mathfrak{F} &= gh - af \dots, \\ k &= abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh, \end{aligned}$$

(Voir note II.)

il faut pour cela écrire

$$\begin{aligned} x' &= 2\xi - x, \\ y' &= 2\eta - y, \\ z' &= 2\zeta - z, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ax + hy + gz &= a\xi + h\eta + g\zeta - q\mathfrak{C}\eta + q\mathfrak{F}\zeta, \\ hx + bx + fz &= h\xi + b\eta + f\zeta + q\mathfrak{C}\xi - q\mathfrak{G}\zeta, \\ gx + fy + cz &= g\xi + f\eta + c\zeta - q\mathfrak{F}\xi + q\mathfrak{G}\eta, \end{aligned}$$

où  $q$  est une quantité arbitraire. En effet, en multipliant ces équations par  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  et en ajoutant, on obtient

$$\begin{aligned} &(a, b, c, f, g, h)(\xi, \eta, \zeta)(x, y, z) \\ &= (a, b, c, f, g, h)(\xi, \eta, \zeta)^2 \text{ (note III),} \end{aligned}$$

et, au moyen de cette équation et des valeurs

$$\begin{aligned} x' &= 2\xi - x, \\ y' &= 2\eta - y, \\ z' &= 2\zeta - z, \end{aligned}$$

on forme tout de suite l'équation (3) (note IV). De plus, en multipliant les trois équations par  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  et en ajoutant, on obtient

$$hz = h\zeta \text{ (note V),}$$

c'est-à-dire

$$z = \zeta$$

et de là

$$z' = z.$$

Cela étant, les deux équations donnent, en remplaçant  $\zeta$  par  $z$ ,

$$\begin{aligned} a\xi + (h - q\mathfrak{C})\eta &= ax + hy + (g - q\mathfrak{F})z, \\ (h + q\mathfrak{C})\xi + b\eta &= hx + by + (f + q\mathfrak{G})z, \end{aligned}$$

et de là, en remarquant que

$$ab - (h - q\mathfrak{C})(h + q\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} + q^2\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}(1 + q^2\mathfrak{C}),$$

on obtient très-facilement, éliminant successivement  $\eta$

et  $\xi$ ,

$$(1 + q^2 \mathfrak{C}) \xi = (1 + qh) x + qby + (qf + q^2 \mathfrak{G}) z,$$

$$(1 + q^2 \mathfrak{C}) \eta = -qax + (1 - qh) y + (-qg + q^2 \mathfrak{F}) z$$

et ensuite

$$(1 + q^2 \mathfrak{C}) x'$$

$$= (1 + 2qh - q^2 \mathfrak{G}) x + 2qby + 2(qf + q^2 \mathfrak{G}) z,$$

$$(1 + q^2 \mathfrak{C}) y'$$

$$= -2qax + (1 - 2qh - q^2 \mathfrak{C}) y + 2(-qg + q^2 \mathfrak{F}) z,$$

c'est-à-dire, en écrivant  $z = z' = 1$ , les valeurs

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 + q^2 \mathfrak{C}) x' \\ = (1 + 2qh - q^2 \mathfrak{C}) x + 2qby + 2(qf + q^2 \mathfrak{G}), \\ (1 + q^2 \mathfrak{C}) y' \\ = -2qax + (1 - 2qh - q^2 \mathfrak{C}) y + 2(-qg + q^2 \mathfrak{F}), \end{array} \right.$$

satisfont identiquement à l'équation

$$(5) \quad (a, b, c, f, g, h) (x', y', 1)^2 = (a, b, c, f, g, h) (x, y, 1)^2.$$

En prenant  $h = 0$ , on a

$$\mathfrak{C} = ab, \quad \mathfrak{F} = -af, \quad \mathfrak{G} = -bg,$$

et les formules deviennent

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 + q^2 ab) x' = (1 - q^2 ab) x + 2qby + 2q(f - qbg), \\ (1 + q^2 ab) y' = -2qax + (1 - q^2 ab) y - 2q(g + qaf), \end{array} \right.$$

valeurs qui satisfont identiquement à l'équation (note VI)

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ax'^2 + 2gx' + l') + (by'^2 + 2fy' + m') \\ = (ax^2 + 2gx + l) + (by^2 + 2fy + m), \end{array} \right.$$

et en y écrivant

$$\frac{1 - q^2 ab}{1 + q^2 ab} = s = \sqrt{1 - abr^2},$$

on obtient des formules qui correspondent précisément aux équations données par Euler pour  $x, y$  en termes de  $a, b$ .

Londres, 10 mars 1857.

NOTES DU RÉDACTEUR.

*Note I.* D'après la commode notation introduite par M. Cayley, l'équation (3) développée a cette forme

$$\begin{aligned} ax'^2 + by'^2 + c'z'^2 + 2fy'z' + 2gx'z' + 2hx'y' \\ = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy. \end{aligned}$$

*Note II.* Désignant par  $k$  le déterminant de chaque membre de l'équation (3), on a

$$k = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh;$$

prenant les dérivées de  $k$  successivement par rapport à chacune des six lettres  $a, b, c, f, g, h$ , on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = bc - f^2, \quad \mathfrak{B} = ac - g^2, \quad \mathfrak{C} = ab - h^2, \\ \mathfrak{F} = + \frac{1}{2} \frac{dk}{df} = gh - af, \quad \mathfrak{G} = fh - bg, \quad \mathfrak{H} = fg - ch. \end{aligned}$$

*Note III.* Cette notation développée donne

$$\begin{aligned} x(a\xi + h\eta + g\zeta) + y(h\xi + b\eta + f\zeta) + z(g\xi + f\eta + c\zeta) \\ = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\xi\eta. \end{aligned}$$

*Note IV.* Remplaçant dans la dernière équation respectivement  $x, y, z$  par  $2\xi - x', 2\eta - y', 2\zeta - z'$ , on obtient

$$\begin{aligned} x'(a\xi + h\eta + g\zeta) + y'(h\xi + b\eta + f\zeta) + z'(g\xi + f\eta + c\zeta) \\ = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\xi\eta. \end{aligned}$$

*Note V.* Exécutant les opérations indiquées, on

trouve

$$\begin{aligned} & x(a\mathfrak{G} + h\mathfrak{F} + g\mathfrak{C}) + y(h\mathfrak{G} + b\mathfrak{F} + f\mathfrak{C}) \\ & \quad + z(g\mathfrak{G} + f\mathfrak{F} + c\mathfrak{C}) \\ = & \xi(a\mathfrak{G} + h\mathfrak{F} + g\mathfrak{C}) + \eta(h\mathfrak{G} + b\mathfrak{F} + f\mathfrak{C}) \\ & \quad + \zeta(g\mathfrak{G} + f\mathfrak{F} + c\mathfrak{C}) - q : \end{aligned}$$

or

$$g\mathfrak{G} + f\mathfrak{F} + c\mathfrak{C} = k ;$$

donc

$$kz = k\zeta, \quad z = \zeta, \quad z = z\zeta - z' = 2z - z',$$

donc

$$z = z'.$$

*Note VI.* Faisant

$$z = z' = 1, \quad h = 0,$$

l'équation (3) prend la forme

$$\begin{aligned} & ax'^2 + 2gx' + by'^2 + 2fy' + c' \\ = & ax^2 + 2gx + by^2 + 2fy + c. \end{aligned}$$

Faisant

$$c = q' = l + m,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & (ax'^2 + 2gx' + l') + (by'^2 + 2fy' + m') \\ = & (ax^2 + 2gx + l) + (by^2 + 2fy + m). \end{aligned}$$