Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques, bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 1-208 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__S1_0>

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

BIBLIOGRAPHIE.

Tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da *Baldassare Boncompagni* secondo la lezione di un codice della Biblioteca ambrosiana di Milano. Firenze, tipografia galileiana di M. Cellini. 1854. — *Trois écrits inédits de Léonard de Pise,* publiés par M. Baldassare Boncompagni, d'après un manuscrit de la Bibliothèque ambrosienne de Milan. In-8 de 122 pages et 1 planche (voir *Bulletin,* t. I, p. 173).

Le premier écrit est intitulé *Flos* (1-44);
Le deuxième *De Avibus* (44-54);
Le troisième *Liber quadratorum* (55-122).

En tête du *Flos* on lit : *Incipit flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarumdam quæstionum ad numerum et ad geometriam vel ad utrumque pertinentium.* Il est dédié au cardinal Raniero Capocci de Viterbe, créé cardinal au titre de Sainte-Marie en Cosmedin, par le célèbre pape Innocent III. Ce cardinal, qui paraît avoir aimé et cultivé les mathématiques pures, avait demandé à Léonard une copie de ses ouvrages : *Quod meorum operum copiam non præceptive saltim, quod vos magis decebat, sed simpliciter petere fuistis per litteras Vestræ Sanctitatis dignati.* « Vous n'avez pas commandé comme il appartenait à votre dignité, mais vous avez daigné demander simplement une copie de mes ouvrages. » Il l'a intitulé *Flos* en honneur de Son Eminence, rayonnant d'une éloquence fleurie parmi les savants, *florida clericorum elegantia radiantibus*, et aussi parce que plusieurs questions, quoique épineuses (*nodose*), sont exposées d'une manière fleurie (*floride*) ; et de même que les plantes ayant des racines en terre surgissent et montrent au jour des fleurs, ainsi de ces questions on en déduit une foule d'autres. Il finit par dire qu'il se soumettra aux corrections que le cardinal voudra lui indiquer (*et me ipsum correctioni Dominationis Vestræ affectuosius supponendo*).

On lit ensuite ce nouveau titre : *Explicit prologus, incipit tractatus ejusdem.* Ceci a besoin d'explication. Il paraît que Léonard mit par écrit les réponses qu'il fit aux questions de Jean de Palerme, lors du passage de Frédéric II par Pise et il adressa cet écrit à l'empereur. (*Cum coram Majestate Vestra, gloriosissime princeps Friderice, magister Johannes Panormitanus, philosophus vester, ipsis mecum multa de numeris contulisset.*)

Le cardinal, ayant eu connaissance de cet écrit, en demanda une copie. Alors Léonard fit une seconde édition, sous le titre de *Flos*, qu'il dédia au cardinal, et cette dédicace sert de prologue qui explique le titre *Flos explicit prologus*, et puis commence le traité, *Incipit tractatus ejusdem.*

La première question est : Trouver un nombre carré qui, augmenté et diminué de 5, reste toujours un nombre carré (p. 2). Léonard répondit à maître Jean que le nombre carré est

$$11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2,$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2,$$

$$\left(\frac{41}{12}\right) - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 \text{ (*)}$$

Après avoir longtemps réfléchi sur la solution de cette question, il vit qu'elle tenait à certaines propriétés générales des nombres carrés, ce qui, dit-il, lui donna occasion de composer un opuscule sur les nombres carrés pour *glorifier Sa Majesté* et qui contiendra les raisonnements et les démonstrations.

Et cum diutius cogitassem unde oriebatur predictæ quæstionis solutio, inveni ipsam habere originem ex multis accidentibus, quæ accidunt quadratis numeris, et inter quadratos numeros; quare hinc sumens materiam, libellum incepi componere ad Vestræ Majestatis Celsitudinis gloriam quem Libellum Quadratorum *intitulavi.*

La seconde question est géométrique : il s'agit de trouver, au moyen d'une des quinze espèces de longueurs du X[e] livre d'Euclide, une longueur x qui satisfasse à la condition

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Léonard démontre d'une manière très-rigoureuse qu'aucune des quinze longueurs euclidiennes ne peut satisfaire, par des considérations géométriques que M. Woepcke a traduites avec intelligence en caractères algébriques, qui donnent toujours plus de précision et plus de clarté quand il

(*) Nous nous servons de signes actuellement en usage.

s'agit de nombres (*Journal* de M. Liouville, t. XX, 1855). En voici la substance. La valeur de x est comprise entre 1 et 2, donc x n'est pas un nombre entier.

1°. x n'est pas non plus un nombre fractionnaire $\frac{\alpha}{\beta}$ qu'on peut toujours supposer irréductible; car on a

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{2\alpha^2}{\beta^2} + \frac{10\alpha}{\beta} = \frac{\alpha[\alpha^2 + (2\alpha + \beta)\beta]}{\beta^3} = 20;$$

équation impossible.

Léonard se sert d'un moyen qui revient au même, mais qui est plus long. Il suit la méthode des Arabes, qui décomposent la puissance des fractions en une somme de fractions ordonnées suivant la puissance négative du dénominateur. Par exemple,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{\alpha_1}{b^m} + \frac{\alpha_2}{b^{m-1}} + \frac{\alpha_3}{b^{m-2}} + \ldots + \frac{\alpha_m}{b},$$

les α sont plus petits que b, à l'exception des α_m qui peut surpasser b; cela revient à écrire les fractions dans un système de numération dont la base est b. Ainsi

$$\frac{\alpha_1}{\beta^3} = \frac{\alpha_1}{\beta^3} + \frac{\alpha_2}{\beta^2} + \frac{\alpha_3}{\beta} \ldots .$$

2°. x ne peut avoir la forme $\sqrt{n}$ où n est rationnelle, car

$$x = \frac{20 - 2x^2}{x^2 + 10};$$

équation impossible.

3°. x n'est pas de la forme $\sqrt[4]{n}$; on aurait

$$n^{\frac{1}{4}} + \frac{n^{\frac{3}{4}}}{10} = 2 - \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{10};.$$

équation dont Euclide démontre l'impossibilité (livre X, 38).

Observation. D'après un théorème connu, on peut démontrer directement que l'équation donnée et l'équation

$$x^4 - n = 0$$

ne peuvent avoir de racines communes. Ce même moyen de démonstration est applicable à tous les cas.

4°. x n'a aucune des formes

$$\sqrt{m} + \sqrt{n}, \quad \sqrt{m + \sqrt{n}}, \quad \sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}};$$

ces lignes *apotomes*, *médiales*, *binomiales* d'Euclide étant exclues, Léonard donne, on ne sait par quelle méthode, cette valeur approchée, d'une surprenante exactitude (*) :

$$x = 1 . 22' . 7'' . 42''' . 30^{\text{iv}} . 4^{\text{v}} . 40^{\text{vi}},$$

car, à la manière arabe, il procède par soixantièmes.

M. Woepcke trouve

$$x = 1,3688081078\,21;$$

réduite en fractions sexagésimales, il trouve

$$x = 1 . 22' . 7'' . 42''' . 33^{\text{iv}} . 4^{\text{v}} . 38,5^{\text{vi}}.$$

Les 30^{iv} de Léonard sont une faute du copiste qui a mis 30 au lieu de 33, faute qui se reproduit encore dans trois autres endroits.

M. Lebesgue conjecture avec raison que Léonard se sera servi de la méthode suivante employée depuis par Viète. L'équation n'ayant qu'une seule racine positive, on

---

(*) *Quia hæc quæstio solvi non potuit in aliquo suprascriptorum, studui solutionem ejus ad propinquitatem reducere.*

fait

$$x = 1 + \frac{y}{60};$$

l'équation en y n'a encore qu'une seule racine positive, dont on trouve facilement la partie entière, et ainsi de suite (Tortolini, *Annali di scienze matematiche e fisiche*, aprile 1855, p. 155).

M. Lebesgue fait observer que Léonard a bien vu que le Traité des Incommensurables d'Euclide gagnerait à être exposé numériquement. Non-seulement il a *vu*, mais il a fait cette exposition numérique :

Et quia difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum X^m *librum glosare incepi, reducens intellectum ejus ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur* (p. 3).

Aussi tous ses raisonnements roulent sur les nombres, qu'il représentait, il est vrai, par des lignes, n'ayant pas encore de signes algébriques à sa disposition. Il *parle* algèbre comme les Arabes, mais ne sait pas l'écrire ; cela arrive même quelquefois à des géomètres de nos jours.

Le célèbre arithmologue de Bordeaux établit les quatre propositions suivantes :

I. P, Q, R, S, m, n étant six nombres *rationnels*, et m, n, mn, $\frac{m}{n}$ n'étant pas des carrés, l'équation

$$P + Q\sqrt{m} + R\sqrt{n} + S\sqrt{mn} = 0$$

ne peut subsister à moins que l'on n'ait

$$P = Q = R = S = 0,$$

car on déduit de cette équation

$$P^2 + mQ^2 - n(R^2 + mS^2) = 2(nRS - PQ)\sqrt{m};$$

donc

$$P^2 + mQ^2 = n(R^2 + mS^2), \quad nRS = PQ,$$

de là

$$(PR - mQS)(PS - QR) = 0,$$
$$PR - mQS = 0, \quad PS = QR,$$

et

$$PS^2 = QRS = \frac{PQ^2}{n}, \quad n = \frac{Q^2}{m} = \left(\frac{Q}{P}\right)^2,$$

contraire à l'hypothèse;

$$PR = mQS, \quad PQR = mQ^2S = nR^2S, \quad \frac{m}{n} = \left(\frac{R}{Q}\right)^2,$$

contraire à l'hypothèse.

On ne peut donc satisfaire à l'équation qu'en posant

$$P = Q = R = S = 0.$$

II. Si l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

a ses coefficients rationnels, α, β, γ, m, n étant cinq nombres rationnels, m, n, $\frac{m}{n}$ n'étant pas des carrés, on ne peut avoir

$$x = \alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n},$$

à moins que β ou γ ne soit nul. En effet, on a

$$x^2 = \alpha' + \beta'\sqrt{m} + \gamma'\sqrt{n} + \delta'\sqrt{mn},$$
$$x^3 = \alpha'' + \beta''\sqrt{m} + \gamma''\sqrt{n} + \delta''\sqrt{mn},$$

les α, β, γ, δ sont des nombres rationnels.

Substituant ces valeurs dans l'équation donnée et égalant à zéro les coeffficients des irrationnels et la quantité rationnelle, on obtient quatre équations. Les coefficients de $\sqrt{m}$ et $\sqrt{n}$ donnent

$$\beta'' + A\beta' + B\beta = 0,$$
$$\gamma'' + A\gamma' + B\gamma = 0,$$

de là

$$\beta''\gamma - \beta\gamma'' = 0.$$

Mettant pour β'', γ'' leurs valeurs, savoir

$$\beta'' = \beta(3\alpha^2 + m\beta^2 + 3n\gamma^2), \quad \gamma'' = \gamma(3\alpha^2 + n\gamma^2 + 3m\beta^2),$$

on obtient

$$2\beta\gamma(m\beta^2 - n\gamma^2) = 0,$$

on ne peut mettre

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2,$$

donc l'on a

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma = 0.$$

Si l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

n'a que des coefficients rationnels, il n'y a pas de racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}}$, à moins que β ou γ ne soit nul.

Car on a

$$(x^3 + Bx)^2 - (Ax^2 - C)^2 = 0;$$

faisant

$$x^2 = y,$$

on trouve

$$y^3 + A_1 y^2 + B_1 y + C^2 = 0;$$

A_1 et B_1 sont rationnels.

Cette équation n'a pas de racine de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n},$$

à moins que β et γ ne soient nuls. Donc l'équation n'a pas de racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}}$.

IV. Supposons

$$\gamma = 0,$$

l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

ne peut avoir une racine de la forme $\alpha + \beta\sqrt{m}$, à moins d'avoir une racine réelle, car elle a aussi pour racine $\alpha - \beta\sqrt{m}$; et a, par conséquent, un facteur rationnel du second degré, donc aussi un facteur rationnel du premier degré. On démontre de même que l'équation n'a pas une racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m}}$ à moins que l'équation en y n'ait une racine rationnelle.

Il suit de tout ceci que l'équation de Léonard n'a aucune racine de ces quatre formes

$$\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}, \quad \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}},$$
$$\alpha + \beta\sqrt{m}, \quad \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m}};$$

ce sont les irrationnelles du X[e] livre d'Euclide.

Voici la troisième et dernière question proposée par maître Jean :

De tribus hominibus pecuniam communem habentibus (p. 17). *In palatio vestro Pisis coram Vestra Majestate.*

Nous traduisons la question, avec M. Boncompagni, en langage algébrique.

Trois hommes ont *en commun* une somme inconnue t; la part du premier est $\frac{1}{2}t$; du second $\frac{1}{3}t$, et par conséquent du troisième $\frac{1}{6}t$. Voulant déposer cette somme en lieu plus sûr (*ad tutiorem locum*), ils prennent au hasard (*fortuitu*) le premier x qui n'en dépose que $\frac{1}{2}x$, le second y et n'en dépose que $\frac{1}{3}y$, et le troisième z et n'en dépose que $\frac{1}{3}z$; de sorte que la somme déposée se monte à $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z$, et lorsqu'ils retirent ce dépôt, chacun en prend le tiers; il s'agit de trouver les valeurs de x, y, z.

Faisons

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=u,$$

c'est u qu'il appelle la *chose* (*posui rem*).

Le premier a gardé $\frac{1}{2}x$ et reçoit u; donc on a

$$\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}t-u;$$

de même pour le second

$$\frac{2}{3}y+u=\frac{1}{3}t-u;$$

et pour le troisième

$$\frac{5}{6}z+u=\frac{1}{6}t-u;$$

De là on tire

$$x=t-2u,$$

$$y=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}u,$$

$$z=\frac{1}{3}t-\frac{6}{5}u,$$

$$x+y+z=t=\frac{17}{10}t-\frac{47}{10}u,\quad \frac{7}{10}t=\frac{47}{10}u,\ 7t=47u;$$

problème indéterminé.

Il pose

$$u = 7,$$

si ponatur rem esse VII.

On a

$$t = 47, \quad x = 33, \quad y = 13, \quad z = 1.$$

Ces équations traduisent fidèlement la suite des raisonnements de l'auteur. Il dit qu'il y a trois modes de solutions qu'il a donnés *in libro nostro quem de Numero composui.* C'est son Traité *de Abaco.*

Les nombres sont écrits tantôt en chiffres romains, tantôt en chiffres arabes.

La suite prochainement.

Traité de Géométrie, publié à Paris en 1855 en langue polonaise; par M. *G.-H. Nievenglowski*, examinateur au Lycée impérial de Saint-Louis (*).

Pendant qu'en France il y a une tendance à rendre la géométrie de plus en plus industrielle à vouloir même en faire une branche de la mécanique, à ne s'en servir que πρὸς ἀλφιτὴν, on doit applaudir à l'homme de cœur qui reste fidèle au culte de l'*idéal,* tel qu'il a été professé par les Platon, les Euclide, les Archimède, tel qu'il est religieusement observé au cours *supérieur* de la Sorbonne. L'auteur m'a expliqué le contenu que de bonnes figures dans le texte font presque deviner. Comparez et jugez.

Ce Traité est divisé en dix livres; les cinq premiers renferment la géométrie plane, et les cinq derniers la géométrie de l'espace.

Le *Livre I* contient quarante théorèmes, savoir : la théorie des perpendiculaires, des parallèles, l'égalité des

(*) *Geometrya,* przez G.-H. Niewęglowskiego. Posnan, 1854 in-8 de 126 pages.

polygones et la symétrie des figures planes. Nous y remarquons entre autres le théorème : *Deux polygones équilatéraux entre eux sont égaux lorsqu'ils ont*, *excepté* trois, *tous les angles homologues égaux*. La démonstration du théorème énoncé d'une manière aussi générale ne se trouve pas, que nous sachions, dans nos Traités français (*voir* les *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 462). Ce livre contient aussi quatre problèmes résolus.

Le *Livre II* traite du cercle et renferme trente théorèmes et vingt-quatre problèmes. L'auteur y établit la méthode des limites et celle d'*Arbosgast* dont il se sert dans le cas des incommensurables. La mesure des angles est exposée avec toute l'étendue et toute la clarté désirables. On a placé ici les quadrilatères inscrit, circonscrit et ex-circonscrit. Parmi les problèmes, nous remarquons ceux-ci : *Diviser l'angle droit en* trois *parties égales*. — *Construire le triangle dont on connaît la hauteur*, *la médiane et la bissextrice*, *partant toutes trois d'un même sommet*. — *Étant donnés trois points* A, B, C *sur un plan*, *trouver le quatrième* D *d'où les distances* AB, BC *soient vues sous des angles donnés*, *etc*.

Le *Livre III* traite de la mesure des polygones et de leur similitude avec tous les détails désirables. On y trouve l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés ou des trois hauteurs ; en fonction des rayons inscrits et ex-inscrits. L'aire d'un quadrilatère inscriptible. La théorie des transversales. Les centres de similitude. Cercles réciproques. Ce livre renferme quarante-huit théorèmes et trente et un problèmes. Parmi ces derniers, nous remarquons la construction des racines d'une équation du deuxième degré et celle de $\sqrt[2^k]{N}$. — *Partager un trapèze en parties proportionnelles aux lignes données par des parallèles aux bases*. — *Construire un quadrilatère in-*

scriptible dont on connaît les quatre côtés. — Trouver le lieu des points également éclairés par deux points lumineux. — Le lieu des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous un même angle. — Tracer sur le terrain une parallèle à une droite donnée, etc. — Sur un polygone donné, circonscrire un polygone semblable à un polygone donné d'un même nombre de côtés. Enfin l'auteur y a donné tous les problèmes des contacts des cercles et des droites.

Le *Livre IV* traite des polygones réguliers convexes et *étoilés*, et de la mesure de la circonférence et du cercle. Du maximum des figures planes. Ce livre renferme vingt-trois théorèmes et seize problèmes avec des applications numériques. On y fait voir en quoi consiste la quadrature du cercle.

Le *Livre V* s'occupe des propriétés segmentaires. On y voit la division harmonique, le rapport anharmonique, l'axe radical, les polaires, les faisceaux, l'involution et la division homographique. Ici se trouve le problème d'un *cercle tangent à trois cercles donnés* résolu *directement*, c'est-à-dire que l'on donne immédiatement le centre et le rayon du cercle cherché ; la solution est ainsi amenée au dernier degré de simplicité. Ce livre, composé de vingt-trois théorèmes et de neuf problèmes, contient aussi l'hexagone inscriptible et circonscriptible et est terminé par les trois sections coniques.

Le *Livre VI* traite des plans et des angles solides. L'ordre que l'auteur y a suivi nous a paru logique. Il traite d'abord des droites et plans perpendiculaires, puis des plans perpendiculaires entre eux ; ensuite viennent les droites et plans parallèles, les plans parallèles entre eux ; enfin les angles solides. Ce livre contient quarante-huit propositions.

Le *Livre VII* traite des *polyèdres*, de leur mesure et similitude, de la symétrie en général, et enfin des centres, axes et plans de similitude. Ce livre se compose de trente-huit théorèmes et de neuf problèmes. Nous y avons remarqué le théorème d'Euler, avec ses conséquences, et quelques théorèmes nouveaux sur l'égalité et la similitude des pyramides, comme : *Deux pyramides sont équiangles entre elles lorsqu'elles ont, excepté un, tous les angles dièdres homologues égaux et pareillement disposés. — Deux pyramides équiangles entre elles sont semblables, etc. — Le volume d'un tronc de parallélipipède a pour mesure le produit de la section droite par la moyenne arête latérale.* Les problèmes sont terminés par celui des *alvéoles*.

Le *Livre VII, de la sphère,* contient quarante-quatre théorèmes et vingt problèmes. C'est un livre très-important et qui contient beaucoup de détails. On y donne la mesure des angles solides, les théorèmes de Lexell et de Steiner, le quadrilatère inscriptible et le contact de cercles sur la sphère. Parmi les problèmes, nous remarquons le tracé de la tangente sphérique à un cercle donné et celui de la tangente sphérique commune à deux cercles donnés. Enfin la résolution du problème : *Construire un triangle sphérique dont on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.* C'est surtout la discussion de ce problème qui nous a paru très-remarquable par sa simplicité. Il est bon de connaître et d'apprécier ce problème que le Programme officiel a exclu de l'enseignement en donnant une singulière raison de cet ostracisme scientifique.

Le *Livre IX* traite de la mesure des trois corps ronds et des polyèdres réguliers Il renferme vingt-neuf théorèmes et treize problèmes. La surface d'un cylindre, d'un cône de révolution, d'une zone, et par suite d'une sphère, est donné avec toute la rigueur désirable. Nous y trouvons cet utile théorème : *La surface latérale d'un cône oblique, qui provient d'un cône de révolution, est égale à son volume divisé par le tiers de la distance de l'arête du cône au point où l'axe perce la base.* On a donné dans ce livre la quadrature des polygones sphériques et des fuseaux sphériques, cylindriques et coniques de révolution; le volume d'une pyramide sphérique et d'un onglet sphérique, cylindrique ou conique. A l'occasion des polyèdres réguliers, on a bien fait de mentionner les polyèdres *réguliers étoilés* de Kepler et de M. Poinsot, comme aussi les polyèdres semi-réguliers appelés *corps d'Archimède*. Le dernier problème donne le rayon des sphères inscrite et circonscrite en fonction du côté d'un polyèdre régulier, et réciproquement le côté, l'apothème, la surface et le volume de ces polyèdres en fonction du rayon de la sphère circonscrite.

Le *Livre X* parle des surfaces courbes en général très-succinctement, du plan tangent, des plans polaires, des plans radicaux. Des trois sections coniques. Des sections anti-parallèles. Intersection d'une sphère et d'un cône ou d'un cylindre; ligne d'entrée et de sortie, etc. Enfin les projections aconiques ou perspectives. Polaires dans les coniques. Le livre est terminé par ce problème : *Mener la tangente par un des cinq points d'une conique qui n'est pas tracée.*

Chaque livre est suivi des énoncés de plusieurs théorèmes à démontrer et de plusieurs problèmes à résoudre, choisis parmi ceux qui demandent quelque réflexion et un certain degré d'intelligence.

Le livre est terminé par trois notes sur la théorie des parallèles, la quadrature du cercle et l'involution, qui méritent d'être lues.

Quoique étranger à la langue slave, nous enregistrons avec une grande satisfaction cet inventaire de l'état actuel de la science comme elle devrait être enseignée dans nos lycées. Nous félicitons la patrie de Copernic de cette riche et estimable production.

O. Terquem, rédacteur.

BIOGRAPHIE.

Henri-Christian SCHUMACHER.

Né dans le hameau de Bramstedt, en Holstein, le 3 septembre 1780. Son père Andréas était conseiller royal de Danemark; la famille est venue, dans le XVIe siècle, de Westphalie en Danemark. Après divers emplois, il fut nommé bailli de l'arrondissement de Bramstedt où H.-C. Schumacher est né; et ensuite il fut maire (amtmann) à Segeberg, où il eut un second fils, Andreas-Anton-Friederich Schumacher. La mère était veuve d'un frère du célèbre géographe Busching. Les deux frères reçurent la première éducation à la maison. Schumacher montra dès l'enfance une prédilection pour les mathématiques qu'il apprit dans le cours de Wolf. Il étudia le droit à Kiel et fut reçu en 1806 docteur en droit à Gottingue. De là il passa quelques années comme précepteur dans une maison en Livonie. A son retour, il fit la connaissance du comte de Reventlow, curateur de l'université de Kiel, qui lui donna les moyens de se livrer entièrement aux mathématiques et à l'astronomie. Il passa quelques années à Gottingue auprès de Gauss. En 1811, il fut nommé professeur d'astronomie à Copenhague où Bugge était directeur. Avec la permission du roi, il accepta en 1812 la place de directeur à l'observatoire de Mannheim, se maria avant son départ avec Christine-Madeleine, née de

Schoun, dont il eut quatre fils et trois filles; l'aîné et le plus jeune des fils le précédèrent dans la tombe. Bugge étant mort, il fut nommé à sa place et fit les cours d'Astronomie en latin, et il vint à Paris et à Londres en 1819, en 1826 à Munich, et tous les ans il alla visiter Olbers à Brême.

Il forma comme disciples : MM. Gunlaa, professeur en Islande; Nissen; Deichgraf, à Tondern; Hansen, directeur à Gotha; Claussen, directeur à Dorpat; Peters, professeur d'astronomie à Konigsberg; et Petersen, son aide à l'observatoire d'Altona depuis 1827 (*).

Se sont exercés sous lui les directeurs : Olufsen à Copenhague; Sélander, à Stockholm; Svanberg, à Upsal; Fuss, à Vilna; Agaardh, à Lund; Gould, à Cambridge (Amérique septentrionale); son fils Richard Schumacher, MM. Old, Sonntagg, Quirling.

Il est mort le 28 décembre 1850 à 11 heures et demie du matin, d'une bronchite, et est enterré à Altona, à côté de sa mère morte le 30 octobre 1822. Son frère Andréas est au service militaire du Danemark.

Ouvrages de Schumacher.

1. Brahé (Tycho de) *Observationes cometæ anni* 1595, *Uraniburgi habitæ,* edidit H.-C. Schumacher. In-4, Altona; 1845.

2. *Ephemeris of the distances of the four planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moons center for the years* 1822 *to* 1830; *to which are added tables for finding the latitude by Polar-Star for* 1821-30. Copenhague, 1820-28.

3. *Ephemeris of the distances of the four planets*

(*) Mort en 1855.

Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moons center in the year 1829. Copenhague, 1827.

4. *Ephemeris of the distances of the four planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moons center for the year* 1833. In-8; Copenhague, 1831.

5. *Distances of the Sun und the four planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moon, for the years* 1835, 1836, 1837, 1838. 4 volumes in-8; Copenhague, 1834.

6. *Tables auxiliaires astronomiques* pour l'année 1827. In-8, Copenhague. (En français.)

7. *Idem,* pour les années 1825-1827. 3 vol in-8. (En allemand.)

8. *Idem,* pour les années 1827-1829. In-8. (En allemand.)

9. *Idem,* pour les années 1820-1829. 10 vol. in-8. (En allemand.)

10. *Collection de Tables auxiliaires.* 2 vol. in-8. Copenhague, 1822. (En allemand.)

11. *Journal of observations made for ascertaining the time of the place in the observatory which was erected at Helgoland for that purpose.* In-4; Altona, 1825.

12. *De latitudine speculæ Havniensis.* In-4; Altona, 1827.

13. *Geometrie der Stellung.* Uebersetz von H.-C. Schumacher. 2 vol. in-8; Altona, 1810. (Traduction de la *Géométrie de position* de Carnot.)

14. Meliola (A.). *Tables des Logarithmes-nombres* (anti-logarithmes), avec une préface de Schumacher. In-12; Altona, 1840. (En allemand.)

15. *Tabula in qua inveniuntur logarithmi conormalis* (*n*) *radicæ terrestris* (*r*) *cum angulo intercepto* (*v*) *datæ latitudini astronomicæ* (*q*) *respondentes.* In-4; Copenhague.

16. Chelius (G. K). *Maasse u gewichtsbuch.* Livre des Poids et Mesures. 3e édition, par J.-F. Hanschild, avec une préface de Schumacher. In-8; Francfort-sur-Mein, 1830.

17. *Réseau trigonométrique du duché de Holstein.* Dessins à la plume sous la direction de Schumacher.

18. *Trigon. naet construert under direction of prof.* Schumacher *i Hertogdommet Lauenberg*, of P. Steffens. Dessin à la plume du réseau trigonométrique du duché de Lauenbourg.

19. Struve (W.). *Sur la dilatation de la glace,* d'après les expériences faites à Poulkova en 1845 et 1846 par Schumacher, Pohrt et Moritz. In-4; Saint-Pétersbourg. (En français.)

20. *Astronomische Nachrichten*, heraug von H.-C. Schumacher. Vol. I-XXXII, in-4. Altona, 1823-1850. (Nouvelles astronomiques.) (Prix : 460 francs.)

Inédit. Traité de cinq pages *Sur une méthode de Gauss de calculer les orbites des planètes.*

Inédit. Solution mathématique du problème: *Connaissant les hauteurs observées de deux étoiles, trouver leur latitude.*

Inédit. *Observations à la lunette méridienne faites à Mannheim et à Copenhague en* 1813 *et en* 1815. (En allemand.)

Inédit. *Journal des observations à l'observatoire de Mannheim en* 1813 *et en* 1814.

Inédit. *Traité de la détermination du temps par les azimuts.*

Observation. Cette liste est extraite du catalogue de livres et cartes composant la bibliothèque de feu H.-C. Schumacher, etc. Ire partie: Sciences mathématiques, physiques et naturelles. En vente aux prix marquées chez A. Asher et Ce, à Berlin. In-8 de 147 pages; 1855.

Ce catalogue, excellente production bibliographique, renferme 2556 articles, dans lesquels les ouvrages mathématiques sont compris depuis 874 jusqu'à 1762, en tout 889 ouvrages mathématiques. Collection formée par un simple particulier. Notre Observatoire, fondé par Louis XIV, successivement royal, national, impérial, nonobstant ces titres officiels, n'a pas ce qu'on peut appeler une bibliothèque. On n'y trouve même pas la collection complète de la *Connaissance des Temps* ni l'*Annuaire* du Bureau des Longitudes. Il est urgent de faire disparaître cette honteuse lacune. Chaque année une somme devrait être portée au budget pour fonder une bibliothèque astronomique à l'Observatoire. On devrait même y transporter les ouvrages astronomiques de la Bibliothèque impériale. C'est là leur véritable place (*). Ces mesures sont dignes de l'illustre directeur qui s'est donné la sainte mission de relever l'astronomie en France, et de ramener les temps des Cassini, des Lacaille, des Lalande.

NOTICE HISTORIQUE SUR LA DUPLICATION DU CUBE.

L'influence immense de ce célèbre problème sur les progrès de la géométrie chez les Grecs nous engage à en donner un historique succinct, d'autant plus qu'il présente de bons sujets d'exercice. Dans cette vue, nous supprimons les démonstrations; aucune ne dépasse la portée d'un bon élève de mathématiques supérieures.

(*) Une bibliothèque *universelle* entraîne infailliblement avec elle un désordre universel; plus elle s'enrichit, moins on y trouve ce qu'on cherche. On rendrait à la Bibliothèque impériale un service immense en y laissant seulement les ouvrages purement littéraires, philosophiques, historiques, et en distribuant les ouvrages scientifiques parmi les bibliothèques spéciales de Paris.

Nous prenons pour guide cette excellente monographie: *Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas;* auctore Nicolao-Theodoro Reimer, philos. doct., Gottingue, MDCCXCVIII (1798), in-8 de XVI-222 pages.

C'est le développement d'une dissertation inaugurale que le savant auteur avait publiée au même endroit deux années auparavant.

Eratosthène (— 252), ayant construit un instrument pour la résolution du problème, le suspendit, comme offrande, à l'une des colonnes d'un temple, et y joignit une description en vers. Ptolémée Evergète (III) (de — 247 à — 222) en ayant entendu parler, voulut en avoir une connaissance plus détaillée. Eratosthène lui écrivit une lettre que nous a conservée, probablement dans son entier, Eutocius d'Ascalon (+ 401) dans son *Commentaire* sur les deux livres d'Archimède relatifs à la sphère et au cylindre.

On trouve cette lettre et le poëme dans le livre I des *Scholarum mathematicorum* de Ramus, dans l'édition d'Archimède, d'Oxford, p. 144, et aussi dans les œuvres de Viète, édition de Schooten, p. 348, mais avec quelques fautes.

Cette lettre contenant des renseignements sur l'origine du problème, nous en donnons la traduction ainsi que celle du poeme (*).

AU ROI PTOLÉMÉE, ÉRATOSTHENE, SALUT.

« On dit qu'un ancien tragique a mis en scène Minos faisant construire un tombeau pour Glaucus. Ce roi, en apprenant que le tombeau aurait cent pieds sur toutes les di-

(*) Elle a été faite par mon fils Alfred, élève au lycée Saint-Louis, et revue, ainsi que les passages grecs, par M. Vincent, membre de l'Institut.

mensions, dit à l'architecte: « Tu proposes un tombeau » trop petit pour le logis d'un roi ; qu'il soit doublé. »

» L'architecte ne se trompa point quant à la forme qui effectivement devait être cubique; mais il s'aperçut qu'il avait commis une erreur en doublant les côtés. En effet, en doublant les côtés, la surface devient quadruple et le volume octuple. Il s'informa auprès des géomètres pour savoir par quel moyen on pourrait doubler le cube en conservant toujours la forme cubique. Ce problème fut appelé la *duplication du cube*, attendu qu'étant donné un cube, il s'agissait de le doubler.

» Tous pendant longtemps restèrent indécis, lorsqu'Hippocrate de Chio imagina qu'en prenant deux droites dont la plus grande fût le double de la plus petite, et insérant entre ces droites deux moyennes en proportion continue, on parviendrait ainsi à doubler le cube; de sorte qu'il ramena une question difficile à une autre qui ne l'était pas moins. Quelque temps après, une peste étant survenue dans l'île de Délos et l'oracle ayant ordonné de doubler un des autels, les Déliens rencontrèrent la même difficulté. Ils envoyèrent auprès des géomètres de l'académie de Platon, pensant y trouver ce qu'ils cherchaient. Ceux-ci se livrèrent à d'actives recherches pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données; et l'on dit qu'Archytas de Tarente résolut le problème en employant des demi-cylindres, et Eudoxe au moyen de certaines lignes courbes. Tous traitèrent la question théoriquement; mais aucun ne put trouver une solution réalisable dans la pratique, excepté Ménechme qui y est parvenu depuis peu, et encore très-péniblement. Quant à nous, nous avons imaginé un instrument d'un emploi facile avec lequel on trouvera, non-seulement deux moyennes, mais encore autant qu'on en voudra. Au moyen de cet instrument, étant donné un solide quelconque compris sous des faces parallélogrammes, nous pourrons le transformer en un cube, et plus généralement transformer une figure en une autre semblable, en augmentant les dimensions sans changer la forme. C'est ainsi que nous pouvons donner la forme cubique, par exemple, aux autels et aux temples, aux vases qui servent à mesurer les liquides et les choses sèches, de façon à pouvoir déduire des côtés de la figure la capacité du cube (*). Cette invention sera très-utile pour augmenter la force projective des machines qui servent à lancer des traits, des pierres, etc.: car il faut alors tout augmenter proportionnellement, les épaisseurs, les longueurs, les ouvertures, les cordages, etc., si l'on veut conserver la similitude; et tout cela ne peut se faire sans la recherche des moyennes. »

POÈME.

« Mon cher, si tu veux doubler un cube ou transformer exactement une figure solide, voici ce que tu dois faire. Soit qu'il s'agisse de mesurer une enceinte, une cave ou une citerne de grande dimension, tu le pourras en faisant mouvoir deux règles moyennes proportionnelles entre deux extrêmes parallèles. Ainsi ne te fatigue pas avec les opérations difficiles des cylindres d'Archytas, ou avec les trois sections du cône de Ménechme, ou même en décrivant les lignes courbes du divin Eudoxe. Avec ces planchettes, tu construiras facilement une infinité de moyennes, en commençant par la plus petite. O Ptolémée, heureux père d'être le compagnon de jeunesse de ton fils et d'avoir pu l'orner de tous les dons chers aux muses en même temps qu'aux rois! O Jupiter céleste, que ce soit de ta propre main que plus tard il reçoive le sceptre! Que tout s'ac-

(*) Les autels de Jéhova n'étaient pas des cubes, mais formaient la moitié ou le double d'un cube (Exode 27; Paralip. 2,4). Ainsi le cube est un type païen, et le prisme droit à base carrée un type jéhoviste.

complisse ainsi, et qu'en voyant cette offrande, on dise : C'est un hommage d'Eratosthène de Cyrène. »

Nous reviendrons plus loin sur l'instrument et sur sa description.

L'auteur tragique dont il s'agit est évidemment Euripide (- 480) qui a fait une tragédie ayant pour sujet la fable de Glaucus. Le célèbre philologue hollandais Walkenaër a complété ainsi le second vers :

Διπλάσιος ἔστω, τοῦ κύβου δὲ μὴ σφαλῇς.

(*Diatribe de fragm. Euripid.*, p. 203.)

Telle est l'origine fabuleuse. Plutarque (—66), dans son écrit sur le génie familier de Socrate, raconte ainsi l'origine historique. Au siècle de Platon (— 452), une peste ravageait l'île de Délos et toute la Grèce. On consulta l'oracle de Delphes. Apollon répondit qu'il voulait qu'on lui élevât un autel double en volume de celui de Délos (*) et de même forme cubique. Les architectes firent la faute indiquée par Eratosthène ; et Philoponus (+617) (**), dans son *Commentaire* sur les Analytiques d'Aristote (Venet., 1534, p. 24) d'où ce récit est tiré, dit que plusieurs placèrent un cube sur un autre et firent ainsi un parallélipipède. La peste continuant, le dieu, consulté une seconde fois, fit la même réponse (***).

Mais écoutons l'inimitable, le délicieux Amyot. Platon est allé en Égypte pour converser avec les prêtres. Un nommé Sammias, son compagnon de voyage, raconte ce qui arriva au retour.

« Ainsy que nous passions le long de la Carie, quelques gents de l'isle de Délos nous rencontrèrent qui

---

(*) De là le nom de problème *déliaque*.

(**) Johannes Alexandrinus Christianus, surnommé *Philoponus* à cause du grand nombre de ses écrits.

(***) Il est probable que c'est Platon qui a fait souffler cette réponse à la Pythie. Ramus, dans l'endroit cité ci-dessus, dit que la Pythie πλατωνίζει, *platonise*.

feirent requeste à Platon, comme estant bien versé et exercité en la géométrie, de leur souldre un oracle estrange et fascheux à entendre que Dieu leur avait donné. La teneur de l'oracle estait, *que les Déliens et tous les aultres peuples grecs auroyent cessation de leurs maulx et misères quand ils auroyent doublé son autel qui estoit au temple de Délos.* Car ils ne pouvoyent imaginer que vouloit dire la substance de cest oracle, et si se feirent moquer d'eulx, quand ils cuidèrent doubler la structure et fabricque de cest autel : car en ayant doublé chasque costé, ils ne se donnerent guarde qu'ils avoyent faict un corps solide huict fois aussy grand comme il estoit auparavant, par ignorance de la proportion qui double telle grosseur. Si recoururent à l'ayde de Platon en ceste difficulté. Et lui, se soubvenant du prebstre égyptien leur dict, que Dieu se joüoit aux Grecs, qui mesprisoyent les sciences, comme en leur reprochant leur ignorance, et leur commandant d'estudier à bon escient, et non pas par dessuz en la géométrie : parce que ce n'estoit pas œuvre d'entendement morose, nez que veist trouble, ains qui feust extresmement exercité en la science des lignes, que de sçavoir trouver deux lignes moyennes proportionales : qui est le seul moyen de doubler un corps quarré en augmentant esgualement toutes ses dimensions : et quant à cela, que Eudoxus le Gnidien, ou Helicon le Cyzicenien, le leur rendroyent par faict : mais au reste Dieu n'avoit que faire de ce redoublement. Là n'y estoit pas ce qu'il vouloit dire ; ains qu'il commandoit aux Grecs de quitter les armes pour converser avecques les Muses, en addoulcissant leurs passions par l'estude des lettres et des sciences, et ainsy se comporter ensemble en prouffitant, et non pas en portant dommage les uns aux aultres. » (Plutarque, traduction d'Amyot, édition de Bastien, t. XIV, p. 375.)

Cette réponse stimula extraordinairement le zèle de ses disciples, et il les engagea, pour résoudre le problème par une proportion doublement continue, à étudier les courbes résultant de l'intersection des solides. Proclus (+ 412) dit (dans son Traité du genre des courbes sur la quatrième définition d'Euclide) :

Τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος

(p. 19 de l'édit. de Bâle).

Platon s'occupa le premier de la *section*. Il s'agit ici non pas des coniques, mais des sections des surfaces en général. Et Proclus (*ibid*, p. 31), suivant en cela Géminus (— 100), attribue même les sections coniques à Ménechme, disciple de Platon, et les spiriques à Perseus : Ἐπινοεῖσθαι δὲ ταύτας τὰς τομὰς, τὰς μὲν ὑπὸ Μεναίχμου τὰς κωνικὰς, τὰς δὲ ὑπὸ Πέρσεως (τὰς σπειρικάς).

« On pense que de ces sections, les unes, savoir les coniques, ont été trouvées par Ménechme, et les autres, les spiriques, par Perseus. »

D'après la lettre d'Ératosthène, il paraîtrait que c'est Hippocrate de Chios, le premier auteur d'éléments de géométrie et le célèbre inventeur des lunules (— 450), qui le premier ramena le problème à l'insertion de deux moyennes géométriques. On trouve même dans Proclus une phrase très-remarquable, en ce qu'elle semble donner la clef des porismes et en attribuer l'invention à Hippocrate de Chios :

Πρῶτον δέ φασι τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι Ἱπποκράτην τὸν Χῖον. (p. 59.)

« On dit qu'Hippocrate de Chios est le premier qui ait opéré le transport des figures embarrassées (sans issues). » N'est-ce-pas ce qu'on nomme aujourd'hui des méthodes *métamorphiques*, ou le transport (ἀπαγωγή) de propriétés connues d'une figure facile aux figures compliquées (par exemple, des cercles aux coniques) ? Les théorèmes qui procuraient ces passages étaient des *porismes* (πορίζω, frayer un passage) ; telles sont aujourd'hui les propriétés segmentaires ou fasciculaires, etc.

Avant de s'adonner à la géométrie, Hippocrate exerçait le négoce avec tant d'impéritie, qu'il s'y est ruiné, victime des fraudes des percepteurs byzantins de l'impôt du 50e (2 pour 100) sur le revenu (πεντηκοστολόγοι).

Pappus (— 300) donne quatre solutions : celles d'Ératosthène, de Nicomède, de Héron, et la sienne (lib. III, p. 8, de la traduction de Commandin. Bologne, 1660).

Il décrit une seconde fois sa solution pour en montrer l'emploi en mécanique, dans la préface du VIIIe livre (pages 449-463).

Eutocius, d'Ascalon en Palestine (+ 600), auteur d'un Commentaire sur les deux livres de la sphère et du cylindre d'Archimède, ramène à la duplication du cube la question où il s'agit de construire une sphère équivalente à un cône ou à un cylindre. Outre les quatre solutions de Pappus, il en rapporte sept autres : celles d'Archytas, Platon, Ménechme, Apollonius de Perge, Philon de Byzance, Dioclès et Sporus. Ainsi l'antiquité nous a transmis onze solutions que nous allons décrire succinctement en langage moderne.

1. Platon (— 452).

Soit un trapèze AECD, rectangle en C et en E ; si les deux diagonales AC, DE se coupent à angle droit en B, on aura

$$DB : BC = BC : BE = BE : AB ;$$

donc BC, BE sont deux moyennes proportionnelles entre AB et DB. Si donc ces deux dernières lignes sont données, on les met à angle droit en B ; ensuite on a un instrument formé de deux montants ajustés perpendiculairement sur une traverse; on applique cet instrument sur l'équerre ABD et on le mène jusqu'à ce que la condition géométrique soit satisfaite.

2. Archytas (—400).

AB est le diamètre d'un demi-cercle que nous supposons horizontal et AC une corde inscrite; c'est entre AB et AC qu'il faut insérer deux moyennes géométriques. Soit D l'intersection de AC prolongé avec la tangente menée en B. Sur la demi-circonférence ACB comme base, imaginons un demi-cylindre vertical, et sur AB comme diamètre un demi-cercle vertical, au-dessus du plan horizontal; supposons que ce demi-cercle tourne autour de l'arête du demi-cylindre qui passe par A, il engendre un tore. Désignons par M la courbe à double courbure, intersection du tore avec le demi-cylindre. Supposons que le triangle rectangle ABD tourne autour de AB comme axe; l'hypoténuse AD décrira un cône. Désignons par N l'intersection de ce cône avec le cylindre; soit K l'intersection des deux courbes M et N, et I la projection de K sur la base du demi-cylindre; I sera évidemment sur la demi-circonférence ACB; on aura

$$AB : AK = AK : AI = AI : AC.$$

C'est le premier exemple d'une courbe à double courbure qu'on rencontre chez les Grecs C'est une belle question de stéréotomie à proposer aux candidats pour l'École Polytechnique.

Archytas, ami de Platon, était stratége des Tarentins (*). Horace l'a immortalisé dans cette ode (lib. I, od. 28):

Te maris et terræ, numeroque carentis arenæ,
Mensorem cohibent, Archyta.

(*) Il a peri dans un naufrage.

C'était une opinion répandue dans l'antiquité et consignée même dans la Bible, qu'il n'existe pas de nombre qui puisse exprimer le nombre des grains de sable existant sur la terre, opinion qui n'aurait jamais eu cours si les Anciens avaient eu un système chiffré. L'*Arénaire* d'Archimède a pour unique but de prouver le contraire.

3. Ménechme (— 400).

Deux solutions : la première par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole ; la seconde par l'intersection de deux paraboles. Solutions extrêmement remarquables. Elles sont le premier exemple de *lieux géométriques*, en usage encore aujourd'hui, et montrent que l'invention des trois sections coniques est bien due à Ménechme ; et c'est ce qu'Eratosthène, dans le poëme rapporté ci-dessus, nomme la *triade* (*) de Ménechme. Il obtenait ces courbes en coupant le cône droit par un plan perpendiculaire à une arête. L'angle au sommet étant droit, il obtenait la parabole ; aigu, l'ellipse ; obtus, l'hyperbole. Apollonius a montré le premier qu'on pouvait obtenir la triade sur un cône oblique quelconque, certaines hyperboles exceptées.

Ménechme, disciple d'Eudoxe de Cnide et auditeur de Platon, était frère de Dinostrate, l'inventeur de la quadratrice.

4. Héron d'Alexandrie (— 152).

Soit ABCD un rectangle et E le centre de ce rectangle ; au sommet B on applique une règle rencontrant les côtés CD, CA, prolongés respectivement en F et en G ; on fait mouvoir cette règle jusqu'à ce qu'on ait $EF = EG$; alors on aura

$$AB : AG = AG : DF = DF : BD ;$$

on a donc ainsi deux moyennes entre AB et BD ou entre CD et CA.

(*) Ce mot n'est pas dans la prose de la lettre.

Dans la construction des machines de guerre, catapultes, balistes, etc., les Grecs prenaient pour calibres le diamètre de la corde tendue (τονός), ou, ce qui revient au même, le diamètre du trou par lequel on passait la corde : ce diamètre servait de module à toutes les dimensions de la machine. Les diamètres étaient proportionnels aux racines cubiques des poids lancés. Il suffit d'une lecture superficielle de l'*Arénaire* pour se convaincre combien était pénible, sans l'aide de chiffres, l'extraction des racines. Aussi les Anciens ramenaient ces opérations d'arithmétique à des constructions graphiques. C'est pour cet usage technique que Héron indique cette construction dans son Traité intitulé : Βελοποιϊκά, *De la fabrication des traits*, qui fait partie de la collection publiée par Thévenot sous le titre de *Veteres mathematici* (*). Pappus donne aussi cette construction.

On sait, d'ailleurs, que l'extraction d'une racine cubique et l'insertion de deux moyennes géométriques sont deux opérations que l'on peut appeler identiques

Héron était élève du célèbre constructeur Ctésibius, dont la vie a été publiée par Bern. Baldus (Aug. Vindel. 1614, in-4).

5. Philon de Byzance (— 152).

Soit ABCD un rectangle; sur la diagonale AC comme diamètre on décrit une circonférence qui passera par B et D; en B on applique une règle coupant la circonférence en E et les côtés DC, DA, prolongés, en F et en G; on fait mouvoir la règle jusqu'à ce qu'on ait $BG = EF$; alors on a

$$BC : FC = FC : AG = AG : AB.$$

Philon était aussi élève de Ctésibius.

(*) Ce titre peut induire en erreur : il y a *les pneumatiques, les automates, etc.* : il faudrait dire *Mechanici veteres.*

6. Apollonius de Perge (— 247).

ABCD est un rectangle, E le centre du rectangle; de ce point comme centre, on décrit un quadrant FG renfermé entre les côtés AB, AC prolongés; lorsque la corde FG du quadrant passera par le point C, on aura

$$AB : AG = AG : DF = DF : CD.$$

Cette solution ne diffère pas de celle de Héron. C'est à tort que Montucla dit qu'Apollonius a fait emploi des coniques.

7. Ératosthène (— 276, naissance).

Soit un premier trapèze $AA'BB'$ rectangle en A et B; un second trapèze adjacent $BB'CC'$ rectangle en B et C, et de telle sorte que les sommets A', B', C' sont en ligne droite, et les diagonales $A'B$, $B'C$ sont parallèles; un troisième $CC'DD'$ adjacent au second : les sommets B', C', D' sont en ligne droite, et les diagonales $B'C$, $C'D$ sont parallèles, et ainsi de suite. Pour fixer les idées, ne prenons que trois de ces trapèzes, on aura

$$AA' : BB' = BB' : CC' = CC' : DD';$$

de sorte que BB' CC' sont deux moyennes *géométriques* entre AA' et DD'. Ces deux dernières lignes étant données, Ératosthène a inventé un instrument nommé *mésolabe* (*), pour réaliser cette construction et trouver les intermédiaires BB', CC'. Cet instrument était formé d'une plinthe en bois, d'ivoire ou d'airain, sur laquelle sont placées trois planchettes rectangulaires très-minces : celle du milieu est fixe, les deux autres sont mobiles dans des rainures pratiquées le long des côtés de la

(*) Μετόλαβον, instrument qui prend les moyennes, de *μέσον* et *λαμβάνω*.

planchette fixe, et on fait mouvoir les planchettes mobiles jusqu'à ce qu'on obtienne la figure géométrique décrite ci-dessus. Si les lignes données surpassent les dimensions de l'instrument, on les réduit proportionnellement. On voit aisément qu'on peut construire un semblable instrument pour insérer autant de moyennes géométriques que l'on veut. On comprend maintenant ce qu'il dit dans sa description poétique : que cet instrument peut servir à transformer les solides, par exemple, à trouver des cônes équivalents à des sphères, etc.; à mesurer toutes sortes de volumes. Les planchettes mobiles sont ce qu'il nomme des *règles*. Cette partie est assez obscure. On voit qu'Eudoxe de Cnide, auditeur et compagnon de Platon en Égypte, a aussi donné une solution du problème par l'intersection de certaines courbes. Elle ne nous est pas parvenue, et devait être très-belle à en juger par l'expression *divine* (*) dont se sert Ératosthène. Toutefois Eutocius dit que la solution d'Eudoxe est si défectueuse, qu'elle ne mérite pas d'être décrite; et, en effet, il la supprime. C'est qu'il s'agit probablement d'une seconde solution purement mécanique.

8. Nicomède (— 150).

Inventeur de la conchoïde (*Nouvelles Annales*, t. II, p. 281), il inventa un instrument pour décrire cette courbe (Eutocius, lib. II, page 146, édition d'Oxford). Il se sert de cet instrument pour trouver deux moyennes géométriques entre les droites AB, BC. Il construit le rectangle ABCD. Soit F le milieu de BC. Il mène en F, au-dessus de BC, une perpendiculaire sur BC, et construit le triangle rectangle CFG où l'hypoténuse CG est égale à $\frac{1}{2}$ AB; en C on mène CL parallèle

(*) Toutefois l'épithète θεουδής s'applique à Eudoxe et non à sa méthode: *le divin Eudoxe*.

à BG, et par le point C, à l'aide de l'instrument conchoïdal, on mène la droite GHI de manière que la partie HI inscrite dans l'angle que forme CL avec BC prolongée soit égale à $\frac{1}{2}$ AB; on mène la droite ID rencontrant BA prolongé en M. On aura

$$AB : IC = IC : MA = MA : BC.$$

9. Dioclès (— 100 ou — 200).

Auteur de la *cissoïde*. On n'est pas d'accord sur le temps où il a vécu. Mais Pappus parle en divers endroits de la cissoïde, il est vrai, sans nommer Dioclès, nous en dirons la raison plus loin (lib. IV, prop. 30, p. 35; lib. III, prop. 4, p. 7); Dioclès est donc antérieur à cet auteur. D'ailleurs Proclus (p. 31), transcrivant Geminus, parle de la cissoïde, et Geminus est du Ier siècle avant Jésus-Christ.

Soient AB, CD deux diamètres rectangulaires d'une circonférence, de sorte que ACBD sont les sommets du carré inscrit; à partir de D, prenons de part et d'autre deux arcs quelconques DE, DF égaux; menons la corde BE et abaissons de F une perpendiculaire FH sur le diamètre AB, et soit G le point où cette perpendiculaire rencontre la corde BE. Le lieu du point G est une cissoïde et l'on a

$$AH : HF = HF : HB = HB : HG.$$

Ainsi, entre AH et HG, on a les deux moyennes HF, HB. La courbe étant tracée, on comprend l'usage qu'on peut en faire pour la solution du problème.

La cissoïde est une courbe à branche infinie asymptotique; mais les Anciens ne connaissaient, du moins ne considéraient que la portion de la courbe située dans l'intérieur du cercle.

10. Pappus (+ 300).

Au commencement de ses *Collections*. Sa construction fourmille de fautes typographiques. Elle est plus exacte dans Eutocius.

Il s'agit de trouver deux cubes qui soient dans un rapport donné.

Soient O le centre et AOB le diamètre d'une demi-circonférence, OC un rayon perpendiculaire au diamètre AB; je prends sur OC un point D qui divise le rayon de manière que l'on ait $\frac{OC}{OD}$ égal au rapport donné; on mène BD qui rencontre la circonférence en E. Au point A, on attache une règle mobile rencontrant la corde BE en F; le rayon OC en G et la demi-circonférence en H, et on la fait mouvoir jusqu'à ce qu'on ait FG = GH; alors on aura

$$\frac{\overline{OC}^3}{\overline{OG}^3} = \frac{OC}{OD}.$$

Le point F appartient à la cissoïde; Eutocius remarque avec raison que cette construction ne diffère pas essentiellement de celle de Dioclès. Il paraît que Pappus l'a compris ainsi, car il a soin de parler de la cissoïde, mais sans citer Dioclès (*voir* p. 33).

11. Sporus (+ 400).

Dans quelques manuscrits, on lit Sporus Nicænus.

Sa construction ne diffère pas de celle de Pappus.

Reimer (*voir* p. 21), à la fin de son ouvrage, donne la liste suivante des auteurs modernes qui se sont occupés de cette question :

1. Nicolas de Cusa (1500). *Opera*. Parisiis, volume II, p. 42.
2. Johannes Vernerus (ad calcem *Libelli super viginti*

duobus elementis conicis. Nurem., 1522). Il nomme les propositions, des *éléments* (*voir* Kastner, t. II, p. 52).

3. Orontius Finæus Delphinas (*Planisphærum geographicum*. Lut. Par., 1544, et *Tractatus*, 1556) parle des deux moyennes.

La solution de Finæus a été démontrée fausse dans les ouvrages suivants :

4. Pet. Nonius Salaciensis. *Opera*. Basil., 1592.

5 Joan. Buteonis Delphinatici *Opera geometrica*. Lugduni, 1554.

Il était moine et disciple de Finæus. L'ouvrage est dédié au cardinal de Tournon, et daté du couvent de Saint-Augustin. Il réfute aussi une construction indiquée par Stifel dans son *arithm. integra* et donne une méthode ingénieuse d'approximation.

Soit à construire $2a^3$.

Il construit le parallélipipède

$$a, \quad a, \quad 2a,$$

ensuite les parallélipipèdes

$$\begin{array}{lll} a\sqrt{2}, & a\sqrt{2}, & a, \\ a\sqrt[4]{2}, & a\sqrt[4]{2}, & a\sqrt{2}, \\ a\sqrt[8]{8}, & a\sqrt[8]{8}, & a\sqrt[4]{2}, \end{array}$$

Tous ces parallélipipèdes sont équivalents à $2a^3$, p, p, q étant les trois côtés d'un parallélipipède, les suivants sont

$$\sqrt{pq}, \quad \sqrt{pq}, \quad p,$$

le rapport

$$\frac{p}{\sqrt{pq}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

va en diminuant ; donc le parallélipipède s'approche toujours d'un cube.

6. Viète, édition de Schooten, p. 242.

7. Joann. Bap. Villalpandus. Hieronymi Pradi et Joan. Bap. Villalpandi e Soc. Jesu *In Ezechielem explanationes*, t. II, p. 289. Romæ, 1606.

8. Claude Richard. Aut., 1645.

9. Johannis Maltherus. *Problema Deliacum de cubi duplicatione*, nunc tandem post infinitos præstantissimorum mathematicorum conatus expedite et geometrice solutum. Franc., 1619.

10. Renatus Franciscus Slusius. *Mesolabium* seu duæ mediæ proportionales inter extremas datas, per circulum et infinitas hyperbolas vel ellipses et per quamlibet exhibitas. Leodii-Eburonum, 1662; in-4.

11. Hugenius Chres. *De circuli magnitudine inventa*. Lug. Batav., 1654.

12. Thomas Hobesius. *Quadratura circuli, cubatio sphæræ, duplicatio cubi*. Amst., 1669; in-4.

13. Thomæ Hobbesii *Quadratura circuli, cubatio sphæræ, duplicatio cubi; confutatio* a J. Wallisii. 1669; Oxonii; in-4.

14. Isaac Barowius. *Lect. opticæ*. Lond., 1674.

15. Vincentius Viviani. *De locis solidis*. Florent., 1707.

16. *La duplication du cube, la trisection de l'angle et l'inscription de l'heptagone régulier dans le cercle;* par M. Comiers Prevost. Paris, 1677.

17. *La duplication du cube par le cercle et la ligne droite*, ou résolution géométrique en cinq manières du problème proposé par M. Comiers, le tout démontré par une méthode aussi particulière que facile à concevoir et par des raisons si fortes, qu'elles ne laissent aucun lieu de douter de la certitude de la résolution qui est fondée sur les mêmes principes qu'Euclide donne dans ses *Éléments;* par M. Brunet, avocat au Parlement de Provence. Paris, 1682.

18. *Nuovo metodo geometrico* per trovar fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali, di Paolo-Mattia Doria. In Venezia, 1715.

19. *Dimostrazione* del luogo ove terminano le linee cubiche ricercate nel libro intitolato, Nuovo metodo, etc. Napoli, 1715.

20. *Lettera* del signor D. Paolo-Mattia Doria indrizzata al signor Giacinto di Cristoforo, nella quale si dimonstra che la parabola Apolloniana in qualunque modo che si descriva, non è linea geometrica; e che in conseguenza di ciò sono false tutte le altre curve. Aust., 1718.

21. Tomo primo delle *Opere matematiche* di Paolo-Mattia Doria nel qual si contengono la duplicazione del cubo et altre opere, etc. In Venezia, 1722, et tomo secondo. Venezia, 176...

22. *Duplicationis cubi Demonstratio* a Paolo-Mattia Doria inventore, celeberrimæ Regiæ Societatis Angliæ censuræ exposita. Hac latina editione maximopere aucta. Venetiis, 1770.

23. *De circuli quadratura et de cubi duplicatione*, cum similium aliarum rerum accessione; Demonstrationes geometricæ, D. D. D. majestati sanctissimæ reginæ Matris Virginis ab Philippo de Carmagninis, in philosophia et medicina Doctore. Florentiæ, 1751; et aussi en italien, même année 1751.

24. *Solution du problème déliaque*, démontrée par Jacques Casanova de Seingald, bibliothécaire de M. le comte de Waldstein, seigneur de Dux, en Bohème. A Dresde, 1791.

25. Biering (Chr.-Henr.). *Historia problematis cubi duplicandi*, specimen historico-mathematicum. Hauniæ, 1844; in-4.

26. Knie (J.-G.). *Theorischen prakt Losung der zwei geometr. aufgaben. etc.* Solution théorico-pra-

tique des deux problèmes : 1° insérer deux moyennes proportionnelles entre deux droites données avec la multiplication du cube un nombre donné de fois ; 2° quadrature du cercle et *vice-versâ* à l'aide de deux instruments. Breslau, 1848, grand in-4.

Doria (n° 22) prétend construire les deux moyennes par des droites. M. Sturm a donné le premier une démonstration rigoureuse de l'impossibilité de faire cette construction par la droite et le cercle. L'illustre géomètre m'a dit avoir simplifié cette démonstration et communiqué cette simplification à MM. Hermite et Bertrand auprès desquels j'ai fait des démarches sans succès.

Observation. M. Woepcke avoue que c'est une opinion erronée de croire que les Grecs ont construit des équations du troisième degré (*Algèbre* d'Omar Alkhayyami, p. XII.). Il est évident que les Grecs, ne connaissant pas le calcul par équations, ne pouvaient songer à construire des équations. Mais si l'on ne se tient pas aux mots, aux sons, et que l'on s'attache à l'idée, il n'est pas moins évident que les Grecs ont construit des équations cubiques binômes et même, au moyen de l'instrument d'Eratosthène, des équations binômes de tous degrés, du moins mécaniquement. Il est vrai que les Arabes ont été plus loin : auraient-ils fait ce second pas, si les Grecs n'avaient pas fait le premier? On remarque que les hommes qui passent plusieurs années à étudier une langue difficile et à y acquérir une certaine supériorité, finissent par s'infatuer du peuple qui a parlé cette langue et à s'ingénier à lui découvrir toutes sortes de mérites. Il en est ainsi de ceux qui font de l'antiquité une étude spéciale, continue, et dont le plus grand bonheur est d'appauvrir les Modernes et d'enrichir les Anciens. Quand saurons-nous que les Grecs, les Arabes, les Indiens, les Chinois, de même que les Anglais, les Allemands, les Italiens, les Français sont des hommes et rien de plus? Dieu a donné la science au genre humain; chacun est appelé à y prendre sa part, n'importe la longitude, la latitude, l'altitude du lieu qu'il habite. La démonstration du théorème de Fermat peut se découvrir à Tornéa, à Khiva, à Tombouctou. Platon aurait-il jamais admis la possibilité du scandinave Abel?

SUR LE PROBLÈME DES BŒUFS ATTRIBUÉ A ARCHIMÈDE.

(Post-scriptum à la Lettre de M. Vincent)

(voir t. Ier, p. 165).

Pour que les lecteurs pussent tirer quelque profit de sa lettre, M. Vincent y a joint le texte rétabli conformément aux remarques qu'il avait présentées, ainsi que la traduction que nous donnons ici.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
Φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης.
Πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς πότ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης, τετραχῆ στίφεα δασσαμένη;
Χροιὴν ἀλλάσσοντα, τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
Κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον·
Ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον· ἐν δὲ ἑκάστῳ
Στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι,
Συμμετρίης τοιῆςδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
Κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
Καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον·
Αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
Ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
Καὶ ξανθοῖς αὖτις πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
Ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης

Τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι.
Αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο·
Σὺν ταύροις πάσης δ' εἰς νομὸν ἐρχομένης
Ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
Ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχοντ' ἀτρεκές.
[Ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
Ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.]
Ξεῖνε, σὺ δ' Ἠελίοιο βοῶν πόσοι ἀτρεκὲς εἰπών,
Χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
Χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χρῶμα ἕκασται,
Οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι', οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής·
Οὐ μήν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος· ἀλλ' ἴθι φράζευ
Καὶ τάδ' ἔτ' ἄλλα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
Κυανέοις, ἵσταντ' ἔμβαδον ἰσόμετροι
Εἰς βάθος εἰς εὖρός τε· τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντῃ
Πίμπλαντο πλῆθος Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
Ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι,
Σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον, οὔτε προςόντων
Ἀλλοχρόων ταύρων, οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας,
Καὶ πληθέων ἀποδοὺς, ὦ ξένε, πάντα μέτρα,
Ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος, ἴσθι τε πάντως
Κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Mon cher ami, si tu es un savant homme, fais bien attention à ce que je vais te dire et calcule-nous le nombre des bœufs d'Hélios.

Partagés en quatre troupeaux, en quel nombre paissaient-ils dans les plaines de la Sicile, l'île aux trois angles?

Divers de couleur, le premier troupeau était d'un blanc de lait, un autre brillait d'un noir éclatant, un autre avait le poil roux, et enfin le dernier était bigarré.

Dans chaque troupeau se pressaient de nombreux taureaux qui présentaient entre eux les rapports suivants :

Songe bien, mon cher ami, que le nombre des taureaux blancs était la moitié et le tiers du nombre des noirs, plus le nombre des roux tout entier; que le nombre des noirs valait le quart et le cinquième de celui des bigarrés, plus encore le nombre entier des roux; enfin que le nombre des taureaux bigarrés était la sixième et la septième partie du nombre des taureaux blancs, plus encore une fois la totalité des roux.

Quant aux vaches, voici ce qui avait lieu : Le troupeau des vaches blanches était exactement le tiers et le quart de celui des noires, les vaches noires valaient ensemble le quart et le cinquième des vaches bigarrées; les bigarrées faisaient absolument un nombre égal à la cinquième plus la sixième partie de tout le troupeau des rousses (qui accompagnaient les taureaux au pâturage). [Enfin les vaches rousses faisaient le demi-tiers et la septième partie du troupeau des blanches.]

Maintenant, mon cher, si tu nous dis exactement de combien de bêtes à cornes se composaient les troupeaux d'Hélios, d'une part le nombre des taureaux (bien nourris), de l'autre celui des vaches, et combien il y en avait de chaque couleur, tu n'auras pas à craindre de passer pour inhabile ou ignorant en arithmétique.

Mais ce n'est point encore assez pour être compté parmi les savants. Voyons, dis-nous quelques autres particularités que présentaient les troupeaux d'Hélios.

Lorsque la foule des taureaux blancs se mêlait à celle des taureaux noirs, ils se rangeaient en bataillon carré; et alors la somme des premiers rangs formant le pourtour produisait un nombre égal à celui qui représente la surface de la Sicile.

Les roux, au contraire, en serrant leurs rangs avec les bigarrés, se formaient en triangle, commençant par Un et allant en augmentant de chaque côté jusqu'au dernier rang, sans qu'il en manquât ni qu'il en restât aucun.

Quand tu auras trouvé tout cela, mon cher ami, et que tu l'auras logé dans ta cervelle; quand tu nous auras donné les valeurs de tous ces nombres, alors marche triomphant et glorieux : tu pourras te vanter d'être un fameux savant.

BIBLIOGRAPHIE.

(Voir p. 1.)

TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO. (Suite.)

De quinque numeris reperiendis ex proportionibus datis (p. 20).

Léonard dit avoir résolu par la même méthode deux autres questions qu'il a transmises à Sa Majesté par le page Robert (*quas per Robertinum aggiu* (sic) *dominicellum vestrum vestre Majestati transmisi*).

On verra que cette méthode consiste à écrire les inconnues *circulairement*. Nous copions ces deux questions en écriture moderne d'après M. Boncompagni, et en conservant la marche de l'auteur.

1re *question*. Trouver cinq nombres x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tels, qu'on ait

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) &= x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5)\\ &= x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_5 + x_1)\\ &= x_4 + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2)\\ &= x_5 + \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3), \end{aligned}\right.$$

et il prend à tout hasard (*fortuitu*) chacune de ces sommes égale à 17. Il appelle la première inconnue x_1 la *cause* (*causa*).

La première équation donne

$$(\mathrm{E}) \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 34 - 2x_1,$$

et de là

$$(\mathrm{F}) \qquad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34 + x_5 - 2x_1.$$

Soustrayant de cette équation la seconde des équations (A), il vient

$$\frac{2}{3}(x_3 + x_4 + x_5) = 17 + x_5 - 2x_1,$$

$$\frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5) = 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_5 - x_1.$$

Ajoutant ces deux dernières équations, on obtient

$$(\mathrm{G}) \qquad x_3 + x_4 + x_5 = 25 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1.$$

Soustrayant cette équation (G) de l'équation (F), on a

$$(\mathrm{H}) \qquad x_2 = 8 + \frac{1}{2} + x_1 - \frac{1}{2}x_5.$$

L'équation (G) donne aussi

$$(\mathrm{I}) \qquad x_3 + x_4 + x_5 + x_1 = 25 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1.$$

Soustrayant de cette dernière équation la troisième des équations (A), on a

$$\frac{3}{4}(x_4 + x_5 + x_1) = 8 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1,$$

$$\frac{1}{4}(x_4 + x_5 + x_1) = 2 + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - \frac{2}{3}x_1.$$

Ajoutant ces deux équations

(J) $$x_4 + x_5 + x_1 = 11 + \frac{1}{3} + 2x_5 - \left(2 + \frac{2}{3}\right) x_1.$$

Soustrayant cette équation de (I),

(K) $$x_3 = 14 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{2} x_5.$$

L'équation (J) donne

(L) $$x_4 = 11 + \frac{1}{3} + x_5 - \left(3 + \frac{2}{3}\right) x_1.$$

On déduit de l'équation (H)

$$x_5 + x_1 + x_2 = 8 + \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2} x_5,$$

$$\frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) = 1 + \frac{7}{10} + \frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{10}.$$

Ajoutant cette équation à l'équation (L),

$$x_4 + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) = 13 + \frac{1}{30} + \left(1 + \frac{1}{10}\right) x_5$$
$$- \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1.$$

Ainsi la quatrième des équations devient

$$13 + \frac{1}{30} + \Big(1 + \frac{1}{10} x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

$$13 + \frac{1}{30} + \frac{11}{10} x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

$$13 + \frac{1}{30} + \frac{11}{10} x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

$$\frac{11}{10} x_5 = \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 + 4 - \frac{1}{30},$$

(M) $$x_5 = \left(3 - \frac{1}{33}\right) x_1 + 3 + \frac{20}{33}.$$

Les équations (H) et (K) donnent

$$x_1 + x_2 + x_3 = 22 + \frac{2}{3} + \left(2 + \frac{2}{3}\right) x_1 - x_5,$$

$$\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3) = 3 + \frac{7}{9} + \frac{4}{9} x_1 - \frac{1}{6} x_5.$$

La sixième des équations (A) devient

$$\frac{6}{6} x_5 + \frac{4}{9} x_1 + 3 + \frac{7}{9} = 17,$$

$$\frac{5}{6} x_5 + \frac{4}{9} x_1 = 3 + \frac{2}{9},$$

$$\text{(N)} \qquad x_5 + \frac{8}{15} x_1 = 15 + \frac{13}{15}.$$

Mettant dans cette équation la valeur de x_5, tirée de (M), on a

$$\left(3 - \frac{1}{33} + \frac{8}{15}\right) x_1 + 3 + \frac{20}{33} = 15 + \frac{13}{15},$$

$$\left(3 + \frac{83}{105}\right) x_1 = 12 \frac{43}{105},$$

$$578 x_1 = 2023,$$

$$x_1 = 3 + \frac{1}{2}.$$

Multipliant cette équation et chacune des équations (H), (K), (L), (M) par 2, on obtient

$$\text{(P)} \quad \left\{ \begin{aligned} 2x_1 &= 7, \\ 2x_2 &= 17 + 2x_1 - x_5, \\ 2x_3 &= 28 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2x_1 - x_5, \\ 2x_4 &= 22 + \frac{2}{3} + 2x_5 - \left(3 + \frac{2}{3}\right) 2x_1, \\ 2x_5 &= \left(3 - \frac{1}{33}\right) 2x_1 + 7 + \frac{7}{33}. \end{aligned} \right.$$

Mettant dans cette équation 7 au lieu de $2x_1$, on a

$$2x_5 = 28,$$
$$x_5 = 14.$$

Si l'on met donc dans les équations (P) 7 à la place de $2x_1$ et 14 au lieu de x_5, on obtient

$$2x_2 = 10, \quad 2x_3 = 19, \quad 2x_4 = 25.$$

Dans tout ceci, Léonard donne le nom de *causa* à x_1 et celui de *res* à x_5, à l'instar des Arabes qui, lorsqu'ils ont deux inconnues, les distinguent par des noms différents (Woepcke, *Extrait du Fakri;* imprimerie impériale, 1853).

Cette disposition circulaire présente l'avantage de pouvoir calculer de suite les valeurs des inconnues quand on connaît la valeur d'une seule.

Cet exemple pris au berceau de la science nous montre quel immense service l'écriture algébrique a rendu à la langue algébrique.

De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta questio notabilis (p. 25).

C'est la seconde question.

Quatre hommes ont : le premier x_1, le deuxième x_2, le troisième x_3, le quatrième x_4 *besants;* ils trouvent une bourse contenant t besants, et l'on a

$$t + x_1 = 2(x_2 + x_3),$$
$$t + x_2 = 2(x_3 + x_4),$$
$$t + x_3 = 2(x_4 + x_1),$$
$$t + x_4 = 2(x_1 + x_2):$$

il s'agit de trouver les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4, t.

« Je démontrerai que la question est impossible, à moins que l'on n'accorde que le premier homme a une dette. » (*Hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabor, nisi concedatur primum hominem habere debitum.*)

En effet, il parvient à l'équation

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)x_2+\left(6+\frac{3}{5}\right)x_1=\left(3-\frac{1}{13}\right)x_2+\frac{9}{13}x_1,$$

équation impossible; car

$$4+\frac{2}{5}>3-\frac{1}{13},$$

$$6+\frac{3}{5}>\frac{9}{13}.$$

Mais en admettant que x_1 est une dette, alors

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)x_2-\left(6+\frac{3}{5}\right)x_1=\left(3-\frac{1}{13}\right)x_2-\frac{9}{13}x_1;$$

de là

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{4},$$

problème indéterminé. Il pose

$$x_1=1,$$

alors

$$x_2=4,\quad x_3=1,\quad x_4=4,\quad t=11.$$

Dans cette question, il nomme *bursa* l'inconnue t; *dragma* l'inconnue x_1, et *res* l'inconnue x_2.

De eadem re (p. 28).

1re question *indéterminée*.

$$\begin{aligned}x_1+t&=a(x_2+x_3),\\ x_2+t&=(a+1)(x_3+x_4),\\ x_3+t&=(a+2)(x_4+x_1),\\ x_4+t&=(a+3)(x_1+x_2).\end{aligned}$$

Léonard dit qu'il faut en général prendre

$$x_1 = -1, \quad x_3 = +1, \quad x_2 = x_4,$$

ce qui donne

$$x_2 = x_4 = a + 2, \quad t = a^2 + 3a + 1.$$

Dans l'exemple particulier donné par l'auteur $a = 4$, alors

$$t = 29.$$

Léonard trouve

$$t = 4 + 6 + 8 + 10 + 1;$$

mais cette progression arithmétique n'est applicable que pour ce cas-là, et pas en général.

2e *question*.

$$x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3) = 14,$$

$$x_2 + \frac{1}{4}(x_3 + x_1) = 17,$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2) = 19.$$

Par une suite très-longue de raisonnements très-simples, il trouve

$$x_1 = 4\frac{41}{50}, \quad x_2 = 11\frac{44}{50}, \quad x_3 = 15\frac{33}{50}.$$

Il prend pour inconnue (*res*) $x_2 + x_3$; écrit les nombres accompagnés de fractions à la manière orientale: $\frac{41}{50}4$, $\frac{44}{50}11$, au lieu de $4\frac{41}{50}$, $11\frac{44}{50}$. Le numérateur est le nombre *supra virgam* et le dénominateur *sub virga*.

Il dit à l'empereur : « Vous savez que j'ai traité cette » question de deux manières différentes dans le XIIIe chapitre de mon livre (*), mais ce nouveau mode de solu-

(*) Sans doute de l'*Abaque*

» tion me plaît mieux que les autres et j'ai voulu en faire » part à Sa Majesté. » *Pateat quidem Serenitati Vestre hanc questionem a me solutam esse in tertio decimo capitulo libri mei dupliciter, sed quia hujus solutionis inventio placet mihi pro ceteris modis, volui eam Vestre pandere Majestati.*

Ce serait de la part de Léonard une grande naiveté, s'il croyait que Frédéric II ait pris connaissance des deux premières solutions et s'enquiert de la troisième.

De quatuor hominibus bizantios habentibus (p. 33).

Cette question est dédiée au cardinal Ranieri. Elle donne lieu à ces quatre équations

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) = 33,$$

$$x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = 35,$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) = 36,$$

$$x_4 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3) = 37;$$

x_1, x_2, x_3, x_4 représentent les nombres de *besants* qu'ont le premier, deuxième, troisième et quatrième homme. Il dit avoir choisi à dessein (*studiose*) les nombres pour que les inconnues soient des nombres entiers et pour montrer que la question est insoluble. Voici sa marche, qui est la même pour tout ce genre d'équations. Il prend pour inconnue

$$x_2 + x_3 + x_4;$$

faisant donc

$$x_2 + x_3 + x_4 = z,$$

alors

$$x_1 = 33 - \frac{1}{2} z,$$

$$\boxed{\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 33 + \frac{1}{2} z \\
x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) &= 35 \\
\frac{2}{3}(x_3 + x_4 + x_1) &= \frac{1}{2} z - 2 \\
\frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) &= \frac{1}{4} z - 1 \\
(x_3 + x_4 + x_1) &= \frac{3}{4} z - 3
\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 33 + \frac{1}{2} z \\
x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) &= 36 \\
\frac{3}{5}(x_4 + x_1 + x_2) &= \frac{1}{2} z - 3 \\
x_4 + x_1 + x_2 &= \frac{2}{3} z - 4
\end{aligned}}$$

En suivant le même procédé, il trouve

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{8} z - 5.$$

Recapitulant

$$x_2 + x_3 + x_4 = z,$$

$$x_3 + x_4 + x_1 = \frac{3}{4} z - 3,$$

$$x_4 + x_1 + x_2 = \frac{2}{3} z - 4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{8} z - 5,$$

additionnant ces équations, on obtient

$$3(x_1+x_2+x_3+x_4)=3\frac{1}{24}z-12,$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1\frac{1}{72}z-4,$$

$$x_1=\frac{1}{72}z-4=33,$$

$$x_1+\frac{1}{2}z=\frac{37}{72}z-4,$$

$$z=72,$$

$$x_1+36=33.$$

Ainsi la question est impossible (*colligitur inde hanc questionem insolubilem esse*) à moins qu'on n'accorde que le premier homme a une dette (*debitum habere*) de 3 besants, savoir la différence entre 33 et 36 (*); ainsi

$$x_1=-3;$$

de là il conclut facilement

$$x_2=18,\quad x_3=25,\quad x_4=29.$$

Si, dit-il, au lieu des nombres 33, 35, 36, 37, on prend 181, 183, 184, 185, alors

$$x_1=1,\quad x_2=94,\quad x_3=105,\quad x_4=141.$$

Ce mode de solution est très-remarquable et s'applique avec avantage à un système quelconque d'équations du premier degré de cette forme :

$$\begin{aligned}
&x_1+b_1(x_2+x_3+\ldots+x_n) &&=c_1,\\
&x_2+b_2(x_3+x_4+\ldots+x_n+x_1) &&=c_2,\\
&x_3+b_3(x_4+x_5+\ldots+x_n+x_1+x_2) &&=c_3,\\
&\vdots\\
&x_n+b_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}) &&=c_n.
\end{aligned}$$

(*) Idee juste des quantités négatives.

De quatuor hominibus qui invenerunt bizantios (p. 36).

Quatre hommes trouvent une somme de besants; ils prennent au hasard le premier x_1, le deuxième x_2, le troisième x_3, et le quatrième x_4 besants. Voulant faire égal partage, le premier double la somme prise par le second, le second triple la somme au troisième, le troisième quadruple la somme au quatrième, et le quatrième quintuple au premier ce qu'il lui reste après avoir doublé la somme du second, et alors les parts sont égales.

On trouve facilement que les quatre parts seront

$$5(x_1 - x_2), \quad 2(x_2 - x_3),$$
$$3(x_3 - x_4), \quad 4(x_4 - x_1 + x_2);$$

problème indéterminé. Il prend 60 pour la part de chacun, alors

$$x_1 = 89,$$
$$x_2 = 77,$$
$$x_3 = 47,$$
$$x_4 = 27.$$

Questio similis suprascripte de tribus hominibus (p. 42.)

Question analogue à la précédente, mais un peu plus compliquée.

Ici se termine la première partie du *Flos*.

Epistola suprascripti Leonardi ad magistrum Theodorum philosophum Domini Imperatoris (p. 44).

L'auteur dit avoir composé ce livre à la prière d'un ami qui voulait connaître le moyen de résoudre les questions sur les *oiseaux* et autres semblables, énoncées ci-dessous, et il dit avoir trouvé aussi le moyen de résoudre ainsi ce qui concerne les alliages des métaux (*omnes diversitates consolaminum monetarum*) (*). En effet, le problème qu'on va lire est aussi une règle d'alliage.

De avibus emendis secundum proportionem datam.

Quelqu'un achète des moineaux, des tourterelles et des colombes, en tout 30 oiseaux pour 30 deniers. 3 moineaux coûtent 1 denier, de même 2 tourterelles; et une colombe coûte 2 deniers. On demande combien il y avait d'oiseaux de chacune de ces trois espèces.

Voici le mode de solution de Léonard :

« J'ai posé (*posui*) d'abord trente moineaux pour
» 10 deniers et j'ai mis de côté 20, différence entre 30
» et 10, et j'ai changé un des moineaux en tourterelle;
» l'augmentation par suite de ce changement est d'un
» sixième de denier; car le moineau coûte $\frac{1}{3}$ de denier et
» la tourterelle $\frac{1}{2}$ denier, et $\frac{1}{2}$ moins $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{6}$; j'ai changé
» derechef un moineau en colombe et j'ai gagné par ce
» changement $1\frac{2}{3}$ denier, différence entre 2 deniers et
» $\frac{1}{3}$ de denier; je réduis le tiers en sixièmes, on obtient
» $\frac{10}{6}$. Je dois aussi changer les moineaux en tourterelles
» et en colombes jusqu'à ce que j'obtienne les 20 que
» j'ai réservés ci-dessus; je réduis ces 20 aussi en

(*) *Solamen* soulagement, de là *solatium* soulagement des douleurs et aussi, en terme de droit, indemnité, compensation, et peut-être *monetarum consolamen,* est améliorer les monnaies, en determiner le prix intrinsèque; en italien, *consolar* aider quelqu'un. C'est le *Tollet-rechnung,* le *calcul-Tollet* des arithméticiens allemands; au moyen des jetons à calculer, on tire (Tollet) un métal d'un autre (Kastner, *Hist. des Math.*, t. I, p. 40).

» sixièmes et l'on a $\frac{120}{6}$ que j'ai divisés en deux parties
» dont l'une puisse se diviser intégralement par 10 et
» l'autre par 1, et la somme des deux divisions ne doit pas
» surpasser 30; la première est 110 et l'autre 10; j'ai
» divisé la première partie, savoir 110, par 10 et la se-
» conde par 1, et j'ai eu 11 colombes et 10 tourterelles,
» lesquelles retranchées de 30, nombre des oiseaux, il
» reste 9 pour le nombre des moineaux, et les 9 moi-
» neaux valent 3 deniers, les 10 tourterelles 5 deniers et
» les 11 colombes 22 deniers; on a ainsi 30 oiseaux pour
» 30 deniers. »

De eodem (p. 45).

Mêmes données; mais 30 est remplacé par 29; il trouve deux solutions

Colombes	11,	Tourterelles	6,	Moineaux	12
—	10	—	16	—	3

Item de avibus (p. 46).

Mêmes données; mais 30 est remplacé par 15; il démontre que la solution n'est possible que pour un nombre fractionnaire d'oiseaux, savoir : colombes $5\frac{1}{2}$, tourterelles 5, moineaux $4\frac{1}{2}$.

Mais si l'on veut avoir quinze oiseaux pour 16 deniers, on a des nombres entiers.

Il a encore deux autres questions sur des oiseaux, qu'il ramène toujours à partager un nombre entier en parties divisibles chacune par un nombre donné, et la somme des quotients ne doit pas surpasser un nombre donné; mais il ne donne pas de règle pour opérer une telle décomposition et il finit par ces paroles : *Et sic possumus in similibus etiam in consolamine monetarum et bizantiorum operari, quod quandoque placuerit Dominationi Vestre liquidius declarabo.*

De compositione pentagoni equaliter in triangulum equicrurium datum (p. 49).

C'est la solution d'un problème de géométrie que Léonard dit avoir trouvée depuis peu (*nuper*) et qu'il soumet à la correction de maître Théodore.

Un triangle isocèle abc est donné,

$$ab = ac = 10, \quad bc = 12,$$

alors la hauteur $ah = 8$; il s'agit de trouver sur ab un point d, sur ac un point g, et sur bc deux points e, f tels, que le pentagone $adefga$ soit équilatéral. Des points dg supposés trouvés, on abaisse sur la base bc les perpendiculaires di, gl. Il prouve que les deux triangles dei, gfl sont égaux. Il prend pour *chose* la longueur d'un côté du pentagone et trouve successivement

$$bd = 10x,$$

$$di = \frac{4}{5}(10 - x) = 8 - \frac{4}{5}x,$$

$$bi = \frac{3}{5}(10 - x) = 6 - \frac{3}{5}x,$$

$$ei = \frac{1}{10}x.$$

Le triangle rectangle dei donne l'équation

$$\frac{7}{20}x^2 + 12\frac{4}{5}x = 64.$$

Il multiplie par $2\frac{6}{7}$ et il obtient

$$x^2 + 36\frac{4}{7}x = 182\frac{6}{7}.$$

x c'est *res*, x_2 *census*, et la quantité toute connue $182\frac{6}{7}$ est le *dragma*.

La question est ainsi réduite à une règle d'algèbre (*et sic reducta est questio ad unam ex regulis algebre*).

Il résout cette équation géométriquement de cette manière.

Concevons qu'on ait le carré *klmn* dont chaque côté soit égal à la *chose* x; prolongeons les côtés opposés *kn*, *lm* de sorte qu'on ait

$$np = mo = 36\frac{4}{7};$$

l'aire du rectangle *klop* est

$$x\left(x + 36\frac{4}{7}\right),$$

donc l'aire de ce rectangle est $182\frac{6}{7}$; et cette aire est égale au produit de

$$kl.lo = lm.mo = 182\frac{6}{7}.$$

Désignons par q le milieu de mo, on a donc

$$mq = 18\frac{2}{7},\quad \overline{mq}^2 = 334\frac{18}{49},$$

$$\overline{mq}^2 + lm.lo = lq^2 = 517\frac{11}{49}.$$

On a par approximation

$$lq = 22.44'.33''.15'''; \; lq - mq = ml = x$$
$$= 4.27'.24''.40'''.50^{\text{IV}}.$$

Il faut toujours se rappeler qu'en tout ceci Léonard, à l'instar des Arabes, *parle* algèbre, mais ne l'*écrit* pas, et ne pouvait pas l'écrire, n'ayant pas les signes qui composent l'alphabet algébrique. Selon l'exacte définition de Lagrange, l'algèbre est un calcul *par équations*. Les Arabes font un tel calcul, mais *discursivement*. Il y a même des géomètres modernes qui s'imaginent faire de la géométrie ancienne, *antiquorum modo*, en algébraïsant sans alphabet.

Il dit en terminant : *Inveni etiam his diebus alias solutiones super similibus questionibus*. L'algèbre appliquée à la géométrie remonte aux Arabes.

Modus alius solvendi similes questiones (p. 52).

L'auteur revient aux questions numériques dont la première roule sur cinq hommes ayant des nombres de *deniers* (*denari*) qu'il faut deviner à l'aide des données suivantes

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 12,$$

$$x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 15,$$

$$x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 18,$$

$$x_4 + \frac{1}{5}x_5 = 20,$$

$$x_5 + \frac{1}{6}x_1 = 23.$$

Il prescrit un procédé qu'on peut généraliser ainsi. Soient les équations écrites *circulairement*

$$\begin{aligned} a\ x_1 + b\ x_2 &= c, \\ a_1 x_2 + b_1 x_3 &= c_1, \\ a_2 x_3 + b_2 x_4 &= c_2, \\ a_3 x_4 + b_3 x_5 &= c_3, \\ a_4 x_5 + b_4 x_1 &= c_4, \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}x_2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}x_3$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}x_4$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{c_3}{a_3} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}x_5$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{c_3}{a_3}$$

$$+ \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\frac{c_4}{a_4} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\frac{b_4}{a_4}x_1$$

$$x_1\left[aa_1a_2a_3a_4 + bb_1b_2b_3b_4\right]$$
$$= a_1a_2a_3a_4c - a_2a_3a_4bc_1 + a_3a_4bb_1c_2 - a_4bb_1b_2c_3$$
$$+ bb_1b_2b_3c_4.$$

De là, par *circulation*, on déduit x_2, x_3, x_4, x_5.

Le procédé indiqué par Léonard revient à la formation des divers termes a_1, a_2, a_3, a_4, c, etc.

On trouve

$$x_1 = 6\frac{612}{721},$$
$$x_2 = 10\frac{218}{721},$$
$$x_3 = 14\frac{43}{721},$$
$$x_4 = 15\frac{453}{721},$$
$$x_5 = 21\frac{619}{721}.$$

Léonard décompose chaque fraction en deux autres ayant pour dénominateurs 7 et 103 ; ses résultats sont fautifs. Par exemple, on trouve

$$x_1 = \frac{4938}{721} = 6\frac{612}{721},$$

et il écrit

$$x_1 = 6 + \frac{3}{7} + \frac{87}{103},$$

ce qui est faux.

Investigatio undè procedat inventio suprascripta (p. 54).

L'auteur offre de dire à maître Théodore d'où provient l'invention précédente. (*Et si unde talis inventio procedat habere volueritis, vobis illud, tanquam domino venerando, mittere procurabo.*)

C'est ici la fin de la deuxième partie du *Flos*. Dans ces deux parties, Léonard traite principalement de la résolution de *certaines* équations du premier degré. Partout il montre beaucoup de finesse et d'habileté, et l'on voit qu'il possédait virtuellement les formules cramériennes : n'oublions pas que nous sommes au commencement du XIII[e] siècle.

Incipit liber Quadratorum compositus a Leonardo Pisano; anni MCCXXV (p. 55).

Nous avons déjà vu que c'est une question proposée par Jean de Palerme qui a engagé Fibonacci à composer ce Traité des Carrés dédié à l'empereur Frédéric II. C'est le monument arithmologique le plus précieux que nous ait transmis le moyen âge et où l'auteur, successeur de Diophante et des Arabes, se montre esprit indépendant, original, créateur et digne précurseur de Fermat; ou plutôt du XIII[e] siècle il faut descendre au XVII[e] pour rencontrer dans Fermat un second Fibonacci.

Dans tout le cours de cet écrit, il s'appuie sur ces deux propriétés : La somme de la suite naturelle des nombres impairs est un carré; la différence des deux carrés impairs consécutifs est un multiple de 8.

Il débute ainsi : *Consideravi super originem omnium quadratorum numerorum, et inveni ipsam egredi ex ordinata imparium ascensione.*

De là il conclut qu'étant donné un carré, on peut trouver un second carré qui joint au premier fasse encore un carré. Si le carré est impair, par exemple 9, on fait la somme des nombres impairs qui précèdent 9; on a

$$16 \quad \text{et} \quad 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Si le nombre est pair, par exemple 36, on cherche les deux nombres impairs consécutifs dont la somme est 36, ce sont 17 et 19; faisant la somme de tous les nombres impairs de 1 à 15, on obtient 64, et

$$6^2 + 8^2 = 10^2,$$

et 100 est la somme des nombres impairs de 1 à 19.

Ad inveniendos plures quadratos numeros (p. 57).

Maintenant on peut trouver tant de carrés qu'on veut dont la somme soit un carré, par exemple si l'on demande cinq carrés, le premier étant 9 et dont la somme soit un carré. Il trouve

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + 3612^2 = 3613^2.$$

En général, si la somme de n nombres impairs consécutifs donne un carré, on a un moyen de trouver un second carré qui joint à ce carré donne un carré. Pour trouver ces n nombres, il suffit d'avoir un carré impair divisible par n.

Autre moyen. Si $2a + 1$ est un carré, $8a + 4$ sera aussi un carré; mais $4a^2 + 8a + 4$ est un carré : donc, etc.

Il démontre par la géométrie que

$$(a+1)^2 - a^2 = (a+1) + a$$

et

$$(a+b^2)^2 - a^2 = b\,(a+b),$$

$$(m^2+n^2)^2 - (m^2-n^2)^2 = 4m^2n^2.$$

Pour ce dernier théorème, il imite la construction d'Euclide, livre X, premier lemme relatif à la proposition 30. Il est fort singulier que ce lemme n'est jamais cité quand il s'agit du théorème numérique de Pythagore ; il contient pourtant la solution générale du problème, et cela paraît avoir échappé à tout le monde, excepté à Fibonacci.

Il démontre encore graphiquement d'une manière très-ingénieuse que le terme sommatoire de la suite des nombres impairs est toujours un carré, et la démonstration est fondée en principe sur ce que

$$(n+1)^2 - n^2 = \Delta n^2 = 2n+1,$$

d'où

$$n^2 = \Sigma\,(2n+1).$$

Problème (p. 66). Étant donné un carré égal à la somme de deux carrés, décomposer ce carré encore d'une autre manière en somme de deux carrés.

Le procédé graphique revient à ceci. Soit

$$a^2+b^2=c^2, \quad d^2+e^2=f^2,$$

alors

$$\left(\frac{dc}{f}\right)^2 + \left(\frac{ec}{f}\right)^2 = c^2.$$

Proposition. Si quatre nombres a, b, c, d ne sont pas en proportion et si a^2+b^2 et c^2+d^2 ne sont pas des carrés, on peut décomposer le produit $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

de deux manières en somme de deux carrés, savoir

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Si a^2+b^2 est un carré, il y a évidemment encore une troisième décomposition et une quatrième lorsque c^2+d^2 est aussi un carré.

Léonard démontre parfaitement cette importante proposition qui lui appartient selon l'observation de M. Woepcke (*Journal de Mathématiques*, t. XX, 1855). Diophante peut avoir connu cette propriété, mais ne l'a pas énoncée, et la démonstration surtout par la méthode graphique n'est pas facile. Le nom de Fibonacci doit rester attaché à ce théorème.

A la page 73, il donne l'équivalent de la formule

$$(b^2-a^2)^2+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2.$$

A la page 74,

$$a^2+b^2=c,$$
$$m^2+n^2=p^2,$$
$$cp^2=r^2+s^2,$$
$$\left(\frac{r}{p}\right)^2+\left(\frac{s}{p}\right)^2=c.$$

Page 76. *Somme des carrés de la suite naturelle des nombres*. Il la trouve d'après ce résultat du calcul aux différences

$$n(n+1)(2n+1)-(n-1).n.2n-1$$
$$=\Delta.n.n+1.2n+1=6n^2,$$

d'où

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\Sigma n^2.$$

Page 78. *Somme des carrés de la suite naturelle des* *nombres impairs*. D'après le résultat

$$\Delta . 2n + 1 . 2n + 3 . 4n + 4 = 12\,(2n + 1),$$

d'où

$$\Sigma\,(2n + 1)^2 = \frac{2n + 1 . 2n + 3 . 24n + 4}{12}.$$

Il indique de même la somme des carrés des nombres pairs et des nombres ternaires, etc., toujours en présentant les nombres par des lignes et opérant sur ces lignes comme nous sur les *lettres*. C'est Viète qui a remplacé ces lignes par des *lettres*.

Le problème suivant étant le plus important de ce Traité des Carrés, nous allons le donner presque textuellement. Il est précédé de ces deux propositions qui font office de lemme.

Lemme I. Lorsque p et q sont deux nombres premiers,

$$\frac{pq\,(p + q)\,(p - q)}{24}$$

est toujours un nombre entier, et lorsque p et q sont deux nombres quelconques,

$$\frac{4pq\,(p + q)\,(p - q)}{24}$$

est un nombre entier.

Le produit

$$4pq\,(p + q)\,(p - q)$$

se nomme *congru*. Nous verrons la raison de cette dénomination.

Lemme II. b étant simultanément moyenne arithmétique entre a_1 et a_{n+2}, entre a_2 et a_{n+3}, entre a_3 et a_{n+3}, etc., entre a_n et a_{2n}, la somme des $2n$ nombres $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ est égale à $2nb$. Si

$$b = 2n,$$

la somme des $2n$ nombres est un carré.

Problème. Trouver trois carrés et un nombre tel, qu'en ajoutant ce nombre au plus petit de ces carrés, on trouve le carré moyen, et qu'en ajoutant ce nombre au carré moyen, on trouve le plus grand carré.

Solution. Nous suivons la marche de Fibonacci, mais en prenant des *lettres* au lieu de *lignes*.

Soient a et b deux nombres *impairs consécutifs*, de sorte que

$$b = a + 2, \quad a + b = 2a + 2 :$$

il s'agit de trouver une suite de nombres impairs consécutifs telle, qu'on puisse la décomposer en deux suites de même somme, et que le nombre des termes de la même suite soit au nombre des termes de la seconde comme $a : b$. Soit la suite des nombres impairs consécutifs

$$(\text{A}) \qquad 2a^2 - 3,\ 2a^2 - 1, \ldots,\ 2a^2 + 4a + 3,$$

elle renferme $2a + 4$ termes.

La moyenne arithmétique entre le premier et le dernier, le deuxième et l'avant-dernier, etc., est

$$2a(a + 1) ;$$

alors, d'après le lemme II, la somme est

$$4a(a + 1)(a + 2) = c,$$

nombre *congru,* en faisant

$$p = a + 2, \quad q = a.$$

Soit la seconde suite

$$\text{B}) \quad 2a^2 + 4a + 5,\ 2a^2 + 4a + 7, \ldots,\ 2a^2 + 8a + 3.$$

Cette suite renferme $2a$ termes. La moyenne arithmétique est

$$2a^2 + 6a + 4 = 2(a + 1)(a + 2),$$

et la somme est

$$4a(a+1)(a+2),$$

nombre congru. Par conséquent, les deux suites (A) et (B) remplissent les deux conditions énoncées ci-dessus.

Complétant la suite (A) en descendant jusqu'à l'unité, la somme de 1 à $2a^2-5$ est égale à $(a^2-2)^2$; la somme de 1 à $2a^2+4a+3$ est

$$(a^2+2a+2)^2,$$

donc

$$(a^2-2)^2+c=(a^2+2a+2)^2.$$

Opérant de même sorte sur la suite (B), la somme de 1 à $2a^2+4a+3$ est

$$(a^2+2a+2)^2;$$

la somme de 1 à $2a^2+8a+3$ est

$$(a^2+4a+2)^2;$$

et

$$(a^2+2a+2)^2+c=(a^2+4a+2)^2.$$

Le problème est donc résolu. Les trois carrés sont : le petit carré $(a^2-2)^2$, le moyen carré $(a^2+2a+2)^2$, et le grand carré (a^2+4a+2), et le nombre à adjondre est

$$c=4a(a+1)(a+2);$$

on l'appelle *congru*, parce qu'il convient à ces trois carrés qui sont *congruents*. Fibonacci prend $a=2$, alors on a

$$c=240$$

et

$$7^2+240=17^2,\quad 17^2-240=7^2,$$
$$17^2+240=23^2,\quad 23^2-240=17^2.$$

Fibonacci se servant de lignes est obligé d'entrer dans de longues discussions amenées pour les cas où $a = 1$ et $a^2 - 2$ devient négatif, et dans des cas fractionnaires il a besoin du premier lemme.

Au moyen de signes littéraux, cette discussion est inutile et l'on a en général (Boncompagni, *Ann. di scienze matematiche,* april. 1855) :

$$c = 4mn(m+n)(m-n),$$
$$x = m^2 + n^2,$$
$$y = (m+n)^2 - 2n^2,$$
$$z = (m+n)^2 - 2m^2,$$
$$z^2 + c = x^2$$
$$x^2 + c = y^2.$$

Hec questio predicta in prologo hujus libri (p. 96).

Cette question, proposée par Jean de Palerme, est, comme nous l'avons vu, de satisfaire aux équations

$$x^2 + 5 = y^2,$$
$$y^2 + 5 = z^2,$$

y est le nombre cherché. Multipliant les deux équations par v^2, on a

$$x^3 v^2 + 5v^2 = y^2 v^2, \quad y^2 v^2 + 5v^2 = z^2 v^2.$$

Cherchons un nombre congru de la forme $5v^2$, il suffit de prendre dans les formules précédentes

$$m = 5, \quad n = 4;$$

alors

$$c = 720,$$
$$\frac{c}{5} = 12^2 = v^2,$$
$$v^2 x^2 = 31^2, \quad v^2 y^2 = 41^2, \quad v^2 z^2 = 49^2,$$

d'où

$$y = \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12}.$$

(Page 98.) Un carré ne peut être un nombre *congru*. Il établit comme lemme qu'on ne peut avoir

$$m(m-n) = n(m+n),$$

ou bien

$$m^2 = n^2 + 2mn;$$

on aurait

$$2m^2 = (m+n)^2; \quad \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 = 2,$$

ce qui est impossible en nombres rationnels. Donc

$$mn(m+n)(m-n)$$

ne peut devenir un carré. Mais il faudrait encore démontrer qu'on ne peut avoir

$$mn = m^2 - n^2;$$

ce qui est d'ailleurs facile, car on aurait

$$4m^2 - 4mn + n^2 = 5n^2, \quad \left(\frac{2m-n}{m}\right)^2 = 5;$$

impossible.

On ne peut donc avoir simultanément

$$x^2 + c^2 = y^2, \quad x^2 - c^2 = y^2;$$

mais la démonstration n'est pas complète. Il faut encore prouver :

1°. Que m, n, $m+n$, $m-n$ ne sont pas des carrés simultanément;

2°. Que m, n, m^2-n^2 ne peuvent être des carrés. Cela ne peut se démontrer que par le théorème de Fermat sur les bi-carrés auxquels Fibonacci n'a nullement pensé; on a eu tort de lui en attribuer la connaissance.

(Page 100.) *Problème.* Satisfaire aux équations

$$x^2 - x = y^2,$$
$$x^2 + x = z^2.$$

Solution. Soit c un nombre congru aux trois carrés u^2, v^2, t^2, de sorte que l'on ait

$$u^2 + c = v^2,$$
$$u^2 - c = t^2,$$

de là

$$u^4 + c u^2 = v^2 u^2,$$
$$u^4 - c u^2 = t^2 u^2,$$
$$\left(\frac{u^2}{c}\right)^2 + \frac{u^2}{c} = \left(\frac{vu}{c}\right)^2,$$
$$\left(\frac{u^2}{c}\right)^2 - \frac{u^2}{c} = \left(\frac{tu}{c}\right)^2;$$

on a donc

$$x = \frac{u}{c}, \quad y = \frac{vu}{c}, \quad z = \frac{tu}{c}.$$

(Page 100.) *Problème.* Satisfaire aux équations

$$x^2 + mx = y^2,$$
$$x^2 - mx = z^2.$$

Solution.

$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{x}{m} = \frac{y^2}{m^2},$$
$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 - \frac{x}{m} = \frac{z^2}{m^2},$$

ce qui revient au problème précédent.

Théorème. Si l'on a trois carrés impairs consécutifs A, B, C, on a

$$C - B - (B - A) = 8;$$

de même si les carrés sont pairs et consécutifs. D'où l'on conclut que les différences entre les carrés impairs consécutifs donnent la progression 8, 16, 24, 32, etc, et les différences entre les carrés pairs forment la progression 12, 20, 28, 36, etc.

Il emploie ce théorème comme lemme pour résoudre l'équation

$$\frac{x^2 - y^2}{z^2 - x^2} = \frac{a}{b}.$$

Si

$$b = a + 1,$$

on a

$$x = 2a + 1, \quad y = 2a - 1, \quad z = 2a + 3.$$

Si

$$a = 2n + 1, \quad b = 2n + 3,$$

on a

$$x = 2n + 2, \quad y = 2n, \quad z = 2n + 4.$$

Faisons généralement

$$x = m + n, \quad y = m, \quad z = m + 2n,$$

on a

$$\frac{x^2 - y^2}{z^2 - x^2} = \frac{2m + n}{2m + 3n} = \frac{a}{b},$$

$$2m(b - a) = n(3a - b),$$

équation à laquelle on peut satisfaire d'une infinité de manières.

Un troisième cas particulier est celui

$$a = p^2, \quad b = q^2;$$

alors

$$x = q^2, \quad y = pq, \quad z = p^2.$$

La solution générale de Fibonacci se ramène à ceci :

Soient A_n, $A_{n'}$, $A_{n''}$ trois termes de la suite naturelle des carrés des nombres impairs, les n indiquant les rangs.

On a, d'après le théorème rapporté ci-dessus,

$$A_{n'} - A_n = 4(n' - n)(n + n' - 1),$$
$$A_{n''} - A_{n'} = 4(n'' - n')(n' + n'' - 1);$$

on doit donc satisfaire à l'équation

$$b(n' - n)(n + n' - 1) = a(n'' - n')(n' + n'' - 1).$$

Exemple I :

$$b = 9, \quad a = 2,$$

il prend

$$n = 4;$$

alors

$$n' = 5, \quad n'' = 8,$$

satisfont à l'équation

$$A_4 = 49, \quad A_5 = 81, \quad A_8 = 225,$$
$$\frac{81 - 49}{225 - 81} = \frac{32}{144} = \frac{2}{9}.$$

Fibonacci fait observer que les solutions fractionnaires de l'équation

$$\frac{x^2 - y^2}{z^2 - x^2} = \frac{a}{b}$$

donnent aussi des solutions en nombres entiers, car on a

$$\frac{p^2 x^2 - p^2 y^2}{p^2 z^2 - p^2 x^2} = \frac{a}{b}.$$

Exemple II :

$$b = 43, \quad a = 11,$$

il trouve

$$n = 3, \quad n' = 14, \quad n'' = 30.$$

Fibonacci parvient à ces diverses valeurs par tâtonnements. Il y a une méthode de solution générale très-simple, très-directe, déjà employée par Diophante pour le cas particulier $a = 1$, $b = 3$ (Diophante, t. II, problème 20). Mais Fibonacci ne connaissait probablement pas Diophante qu'il ne cite jamais. D'ailleurs il ne cite qu'Euclide. A-t-il connu Alkharki? c'est fort douteux. Il résout ensuite ce problème qui ne présente aucune difficulté (p. 112) :

$$x^2 + y^2 = u^2,$$
$$x^4 + y^2 + z^2 = v^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = w^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Questio mihi proposita a Magistro Theodoro, Domini Imperatoris phylosopho (p. 114).

$$x + y + z + x^2 = u^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 = v^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = w^2.$$

C'est la dernière question; le manuscrit est malheureusement interrompu au verso de la feuille 29; de sorte qu'on n'a pas la solution complète. Elle a été restaurée et généralisée dans un beau travail de M. Genocchi que nous donnerons dans ce journal. Ce qui précède suffit pour justifier la haute importance historique qu'on doit attacher à la découverte du prince Boncompagni. On trouve en outre, dans l'ouvrage cité ci-dessus (*Intorno ad alcune opere, etc.*), des renseignements curieux sur divers personnages. Antonio de' Mazzinghi da Peretola (vers 1350); Dagomar Paulo dell'Abbaco (XIVe siecle) (*); Jean dell' Abbaco, Antoine Corbinelli (XVe siècle), probablement de la famille de l'ami de madame de Sévigné, et plusieurs autres. C'est un ouvrage à consulter par les biographes et les bibliographes.

(*) On lui doit l'idée de partager les nombres en tranches de trois chiffres, pour en faciliter l'énonciation.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE M. CH. STURM (*).

Charles Sturm est né à Genève, alors chef-lieu du département du Léman, le 6 vendémiaire an XII (29 septembre 1803). Sa famille, qui appartenait à la religion protestante, était originaire de Strasbourg et avait quitté cette ville vers 1760. Elle comptait probablement parmi ses ancêtres deux hommes célèbres au XVI^e siècle, Jacques Sturm, président (*statt-meister*) de la république de Strasbourg, qui se distingua dans la lutte de cette ville contre Charles-Quint, et Jean Sturm, humaniste, diplomate, théologien, dont le nom se trouve mêlé à toutes les querelles littéraires, politiques et religieuses de son époque.

Le jeune Sturm montra de bonne heure des dispositions extraordinaires, et il obtint au collége de nombreux succès dans toutes les parties de ses études. Il apprit avec une égale facilité les langues anciennes et modernes, la littérature, l'histoire. On nous a même rapporté qu'à douze ans il composait des vers qui décelaient beaucoup d'imagination et de sensibilité. Mais à mesure qu'il avançait en âge, il donnait une préférence de plus en plus marquée aux études scientifiques.

M. Sturm quitta le collége en 1818 pour suivre les cours plus savants de l'Académie de Genève. Il y eut pour professeurs MM. J.-J. Schaub, le colonel (depuis général) Dufour et Simon Lhuilier. Ce dernier, géomètre

(*) On ferait bien de solder l'arriéré et de prononcer les Éloges des académiciens morts. Ne leur devant alors que la vérité, il y a là un noble stimulant, et c'est pour le Secrétaire perpétuel un devoir pieux à remplir envers la mémoire de Lacroix, Legendre, Prony, Sturm, Binet. Tm.

éminent, avait pour son élève une vive affection et se plaisait à lui prédire un brillant avenir. Il eut le bonheur de vivre assez longtemps pour voir ses prédictions se réaliser.

En 1819, un grand malheur vint frapper M. Sturm et le mettre aux prises avec les nécessités de la vie. Son père mourut dans la force de l'âge, ne laissant aucune fortune à sa veuve et à quatre enfants, dont Charles était l'aîné. Pour venir au secours de sa mère qu'il aimait tendrement, M. Sturm, quoique bien jeune, se livra à l'enseignement et commença par donner des leçons particulières. En 1823, il entra comme précepteur dans la famille de Broglie, où il fut chargé de l'éducation du frère de madame de Broglie, fils de la célèbre madame de Stael. Il demeura quinze mois dans cette respectable famille, dont il eut beaucoup à se louer.

M. Sturm accompagna son élève à Paris, vers la fin de 1823. En route, il lia connaissance avec un bibliothécaire de Dijon qui conduisait son fils à l'Ecole Polytechnique. Ces messieurs étaient des lecteurs assidus du *Journal de Gergonne,* où M. Sturm avait déjà inséré quelques bons articles. Quand ils apprirent le nom de leur compagnon de voyage, ils lui firent beaucoup de compliments et de politesses. A vingt ans, de pareilles rencontres, premières joies d'une célébrité naissante, ont un charme tout particulier qui les fait compter parmi les plus grands bonheurs de la vie.

M. Sturm aimait à se rappeler cette époque. Il était alors pauvre et presque inconnu. Mais il avait la conscience de sa force, et son existence modeste était embellie par l'espérance, ce bien souvent préférable au but le plus ardemment poursuivi. « Je suis actuellement, écrivait-il à sa mère, en relation avec des hommes très-savants et très-distingués. Il faut tâcher de m'élever à peu près à leur niveau. »

Ce premier séjour à Paris fut de courte durée. M. Sturm y revint un an après avec son ami d'enfance, M. Daniel Colladon, aujourd'hui professeur à l'Académie de Genève et physicien distingué. De 1825 à 1829, les deux amis vécurent ensemble, mettant en commun leurs travaux, leurs espérances, leurs joies et leurs peines. Le 11 juin 1827, une haute distinction venait récompenser leurs efforts : ils remportaient le grand prix de Mathématiques proposé par l'Académie pour le meilleur Mémoire sur la compression des liquides.

M. Sturm était venu à Paris avec une lettre de recommandation de M. Lhuilier pour M. Gerono. L'éminent professeur accueillit le jeune mathématicien avec une cordialité dont celui-ci lui a toujours gardé une profonde reconnaissance, et lui procura des relations utiles. MM. Arago, Ampère et Fourier suivaient avec intérêt les travaux de M. Sturm et de son ami. Je n'ai pas besoin de dire que les jeunes savants étaient obligés d'abandonner parfois la haute théorie pour des occupations moins relevées, mais plus lucratives. M. Arago, dont la prévoyante amitié embrassait tous les détails, ne laissait échapper aucune occasion de leur envoyer des élèves.

A cette époque, M. Fourier réunissait autour de lui quelques jeunes géomètres, dont la réputation commençait à se faire jour et qui ont tenu depuis ce qu'ils promettaient alors. L'illustre savant les initiait à ses travaux de prédilection et les entraînait dans la route où il avait fait de si importantes découvertes. M. Sturm subit l'heureuse influence de ce maître vénéré, dont il ne parlait jamais qu'avec émotion. Il dirigea ses recherches vers la théorie de la chaleur et l'analyse algébrique. C'est en étudiant les propriétés de certaines équations différentielles qui se présentent dans un grand nombre de questions de physique mathématique, qu'il trouva son fameux théorème. Cette découverte, publiée en 1829, fit sensation et plaça son auteur au rang des premiers géomètres.

M. Sturm accueillit avec joie la révolution de Juillet dans laquelle il crut voir l'avénement définitif d'une sage liberté. Cette révolution lui fut du moins favorable en lui permettant d'entrer dans l'Instruction publique, dont sa qualité de protestant l'avait éloigné pendant la Restauration. La haute protection de M. Arago le fit nommer, à la fin de 1830, professeur de Mathématiques spéciales au collége Rollin.

C'est de cette époque que date son amitié avec M. Liouville, amitié qui a duré jusqu'à sa mort.

Le 4 décembre 1834, l'Académie des Sciences l'honora du grand prix de Mathématiques, qui devait, aux termes du programme, être décerné à l'auteur de la découverte la plus importante publiée dans les trois dernières années. Le Mémoire couronné, déposé au Secrétariat le 30 septembre 1833, était relatif à la théorie des équations.

En 1836, M. Sturm fut nommé membre de l'Académie des Sciences, en remplacement de M. Ampère, par 46 voix sur 52 votants.

Entré à l'École Polytechnique en 1838, comme répétiteur d'Analyse, M. Sturm devenait deux ans plus tard professeur à cette école. Dans la même année (1840), présenté en première ligne par le Conseil académique et par la Faculté, il occupait la chaire de Mécanique laissée vacante par la mort de Poisson.

M. Sturm était, en outre, officier de la Légion d'honneur (1837), membre de la Société Philomathique, des Académies de Berlin (1835) et de Saint-Pétersbourg (1836), de la Société Royale de Londres (1840). Cette dernière lui avait décerné la médaille de Copley pour ses travaux sur les équations.

M. Sturm se montrait digne de tous ces honneurs par son zèle à remplir ses diverses fonctions. Doué d'une constitution naturellement forte, il pouvait compter sur une longue carrière et de nouveaux succès. Malheureusement, vers 1851, sa santé subit une altération profonde par suite d'une trop forte application à des recherches difficiles, et il fut obligé de se faire remplacer à la Sorbonne et à l'Ecole Polytechnique. Il reprit ses Cours à la fin de 1852, mais il ne se rétablit jamais complétement. Malgré les soins de sa famille qui retardèrent, mais ne purent arrêter les progrès du mal, il succomba le 18 décembre 1855, à l'âge de cinquante et un ans (*).

M. Sturm n'était pas seulement un homme de talent, c'était aussi un homme de cœur, bon pour sa famille, bon pour ses amis, dont le nombre était grand. « J'ai beaucoup d'amis, » disait-il avec un naïf orgueil, et cette parole, qui chez tout autre aurait passé pour une exagération, était rigoureusement vraie. A ceux que j'ai déjà cités, j'ajouterai, sans prétendre à une énumération complète, MM. Lejeune-Dirichlet, Ostrogradsky, Brassine, Catalan. M. Faurie, d'abord élève, devenu ensuite l'ami intime de M. Sturm, mérite une mention spéciale pour le dévouement dont il a fait preuve dans les circonstances les plus pénibles.

Dans sa prospérité, M. Sturm n'oubliait pas les jours difficiles et le généreux appui qu'il avait reçu de MM. Ampère, Fourier, Arago. Il se plaisait à venir en aide aux jeunes gens qui débutaient dans la carrière des sciences et il savait les obliger avec une délicatesse admirable.

M. Sturm se taisait volontiers avec les personnes qu'il

(*) Il n'a pas été marié et laisse de modestes économies et un riche capital de gloire à une sœur digne d'un tel héritage, malheureusement peu efficace pour l'existence. Puisse y suppléer un ministre, savant académicien, juste rémunérateur de services consciencieux. Car pour Sturm la science était un *but*, pour la foule, elle est un *moyen*. TM.

ne connaissait pas; mais quand sa timidité naturelle était vaincue, il révélait tout le charme d'un esprit fin et original. Il était passionné pour la musique des grands maîtres, et nous tenons de lui qu'à une époque où ses ressources étaient bien faibles, il s'imposait des privations afin de pouvoir entendre les chefs-d'œuvre de Rossini et de Meyerbeer.

Comme professeur, M. Sturm se distinguait par la clarté et la rigueur. On lui doit beaucoup de démonstrations ingénieuses qui, répandues par ses élèves, ont ensuite passé dans des livres dont les auteurs ont presque toujours *oublié* de le citer. Mais il était riche, point avare et ne réclamait jamais. « En ai-je assez perdu, disait-il en riant, de ces petits objets! et combien peu m'ont été rapportés par d'honnêtes ouvriers! A la longue, cependant, le total peut faire, comme on dit, une perte *conséquente*. »

Les qualités de M. Sturm étaient bien appréciées par la jeunesse intelligente qui suivait ses leçons. « On admirait, dit l'un de ses élèves (*), (et j'ajouterai: l'on aimait) cet homme supérieur s'étudiant à s'effacer, pénétrant dans l'amphithéâtre avec une timidité excessive, osant à peine regarder son auditoire. Aussi le plus religieux silence régnait-il pendant ses leçons, et on pouvait dire de lui comme d'Andrieux, qu'il se faisait entendre à force de se faire écouter, tant est grande l'influence du génie! »

Enfin, pour achever de faire connaître l'homme éminent que nous venons de perdre, nous citerons encore les paroles touchantes prononcées sur sa tombe par M. Liouville, le jeudi 20 décembre 1855.

(*) M. Regray-Belmy, ancien élève de l'École Polytechnique. Voir le *Siècle* du 30 décembre 1855.

« Messieurs,

» Le géomètre supérieur, l'homme excellent dont nous accompagnons les restes mortels, a été pour moi, pendant vingt-cinq ans, un ami dévoué; et par la bonté même de cette amitié, comme par les traits d'un caractère naïf uni à tant de profondeur, il me rappelait le maître vénéré qui a guidé mes premiers pas dans la carrière des mathématiques, l'illustre Ampère.

» M. Sturm était à mes yeux un second Ampère : candide comme lui, insouciant comme lui de la fortune et des vanités du monde; tous deux joignant à l'esprit d'invention une instruction encyclopédique; négligés ou même dédaignés par les habiles qui cherchent le pouvoir (*), mais exerçant une haute influence sur la jeunesse des écoles, que le génie frappe; possédant enfin, sans l'avoir désiré, sans le savoir peut-être, une immense popularité.

» Prenez au hasard un des candidats à notre Ecole Polytechnique, et demandez-lui ce que c'est que le théorème de M. Sturm : vous verrez s'il répondra! La question pourtant n'a jamais été exigée par aucun programme : elle est entrée d'elle-même dans l'enseignement, elle s'est imposée comme autrefois la théorie des couples.

» Par cette découverte capitale, M. Sturm a tout à la fois simplifié et perfectionné, en les enrichissant de résultats nouveaux, les éléments d'algèbre.

» Ce magnifique travail a surgi comme un corollaire d'importantes recherches sur la mécanique analytique et sur la mécanique céleste, que notre confrère a données, par extrait seulement, dans le *Bulletin des Sciences* de M. Férussac.

(*) Lorsque des Lagrange, des Laplace, des Poisson, zélés et assidus travailleurs, arrivent au pouvoir, il faut s'en féliciter. Tm.

» Deux beaux Mémoires sur la discussion des équations différentielles et à différences partielles, propres aux grands problèmes de la physique mathématique, ont été du moins publiés en entier grâce à mon insistance. « La » postérité impartiale les placera à côté des plus beaux Mé» moires de Lagrange » (*). Voilà ce que j'ai dit et imprimé il y a vingt ans, et ce que je répète sans craindre qu'aujourd'hui personne vienne me reprocher d'être trop hardi.

» M. Sturm a été le collaborateur de M. Colladon dans des expériences sur la compressibilité des liquides que l'Académie a honorées d'un de ses grands prix.

» Nous lui devons un travail curieux sur la vision, un Mémoire sur l'optique, d'intéressantes recherches sur la mécanique, et en particulier un théorème remarquable sur la variation que la force vive éprouve lors d'un changement brusque dans les liaisons d'un système en mouvement. Quelques articles sur des points de détail ornent nos recueils scientifiques.

» Mais, bien qu'il y ait de quoi suffire à plus d'une réputation dans cet ensemble de découvertes solidement fondées et que le temps respectera, les amis de notre confrère savent que M. Sturm est loin d'être là tout entier, même comme géomètre. Puissent les manuscrits si précieux que quelques-uns de nous ont entrevus se retrouver intacts entre les mains de sa famille! En les publiant, elle ne déparera pas les chefs-d'œuvre que nous avons tant admirés.

» L'originalité dans les idées, et, je le répète, la solidité dans l'exécution, assurent à M. Sturm une place à part.

(*) M. Liouville s'exprimait ainsi dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences le 14 décembre 1836, et cependant M. Sturm était son concurrent pour la place vacante par le décès d'Ampère. Un pareil fait, assez rare dans l'histoire des luttes académiques, porte avec lui son éloge.

Il a eu de plus le bonheur de rencontrer une de ces vérités destinées à traverser les siècles sans changer de forme, et en gardant le nom de l'inventeur, comme le cylindre et la sphère d'Archimède.

» Et la mort est venue nous l'enlever dans la fleur de l'âge! Il est allé rejoindre Abel et Gallois, Göpel, Eisenstein, Jacobi.

» Ah! cher ami, ce n'est pas toi qu'il faut plaindre. Echappée aux angoisses de cette vie terrestre, ton âme immortelle et pure habite en paix dans le sein de Dieu, et ton nom vivra autant que la science.

» Adieu, Sturm, adieu. »

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE DES TRAVAUX DE M. STURM.

ANNALES DE MATHÉMATIQUES DE GERGONNE.

1. Tome XIII (1822-23), page 289. — *Extension du problème des courbes de poursuite.*

Solution d'une question proposée par le rédacteur.

2. *Ibid.*, p. 314. — *Déterminer en fonction des côtés d'un quadrilatère inscrit au cercle* : 1° *l'angle de deux côtés opposés;* 2° *l'angle des diagonales.*

3. Tome XIV (1823-24), p. 13. — *Étant donnés trois points et un plan, trouver dans ce plan un point tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit un minimum.*

M. Sturm, sans résoudre le problème par des formules explicites, démontre, à l'aide de considération empruntées à la mécanique, plusieurs propriétés du point cherché. Il généralise ensuite le problème.

4. *Ibid.*, p. 17. — *Démonstration analytique de deux théorèmes sur la lemniscate.*

Démonstration de deux théorèmes énoncés par M. Talbot, concernant l'excès fini de l'asymptote d'une hyperbole équilatère sur le quart de cette courbe.

5. *Ibid.*, p. 108. — *Recherches analytiques sur une classe de problèmes de géométrie dépendants de la théorie des maxima et des minima.*

Maximum et minimum d'une fonction des distances d'un point variable à d'autres points dont les uns sont fixes, les autres assujettis à se trouver sur des courbes ou sur des surfaces données.

6. *Ibid.*, p. 225. — *Démonstration de deux théorèmes sur les transversales.*

7. *Ibid.*, p. 286. — *Lieu des points desquels abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle et joignant les pieds de ces perpendiculaires, on obtienne un triangle d'aire constante.*

8. *Ibid.*, p. 302. — *Recherche de la surface courbe de chacun des points de laquelle menant des droites à trois points fixes, ces droites déterminent sur un plan fixe les sommets d'un triangle dont l'aire est constante.*

9. *Ibid.*, p. 381. — *Courbure d'un fil flexible et inextensible dont les extrémités sont fixes et dont tous les points sont attirés et repoussés par un centre fixe, suivant une fonction déterminée de la distance.*

10. *Ibid.*, p. 390. — *La distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle est moyenne proportionnelle entre le rayon du circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre de l'inscrit.*

11. Tome XV (1824-25), p. 100. — *Démonstration de quatre théorèmes sur l'hyperbole.*

12. *Ibid.*, p. 205. — *Recherches sur les caustiques.*

Cas où la ligne réfléchissante ou séparatrice de deux milieux est une circonférence. Propriétés des ovales de Descartes.

Ce Mémoire est le seul morceau de Géométrie que nous ait laissé M. Sturm et montre ce qu'il aurait pu faire dans ce genre s'il l'avait cultivé.

13. *Ibid.*, p. 250. — *Théorèmes sur les polygones réguliers.*

Démonstration et généralisation d'un théorème de Lhuilier.

14. *Ibid.*, p. 309. — *Recherches analytiques sur les polygones rectilignes plans ou gauches.*

15. *Ibid.*, p. 238. — *Recherches d'analyse sur les caustiques planes.*

Relations entre les longueurs des rayons incidents et réfractés correspondants, prises, l'une et l'autre, depuis le point d'incidence jusqu'à ceux où ces rayons touchent leurs caustiques respectives. Rectification des caustiques planes.

16. Tome XVI, p. 265. — *Mémoire sur les lignes du second ordre.* (Première partie.)

Propriétés des coniques qui ont quatre points communs. Pôles et polaires. Théorèmes de Pascal et de Brianchon.

17. Tome XVII, p. 177. — *Mémoire sur les lignes du second ordre.* (Deuxième partie.)

On y trouve les deux théorèmes suivants qui sont une généralisation de celui de Desargues :

Quand deux coniques sont circonscrites à un quadrilatère, si l'on tire une transversale quelconque qui rencontre cette courbe en quatre points et deux côtés opposés du quadrilatère en deux autres points, ces six points seront en involution.

Quand trois coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, une transversale quelconque les rencontre en six points qui sont en involution.

BULLETIN DES SCIENCES DE FÉRUSSAC.

M. Sturm a rédigé en 1829 et 1830 la partie mathématique de ce *Bulletin*.

18. Tome XI (1829), p. 419. — *Analyse d'un Mémoire sur la résolution des équations numériques.* (Lu à l'Académie des Sciences le 13 mai 1829.)

Ce Mémoire contient le fameux théorème de M. Sturm. La démonstration en a paru pour la première fois dans l'*Algèbre* de MM. Choquet et Mayer (1re édition, 1832). M. Sturm a donné dans le même ouvrage une démonstration plus simple que celle de M. Cauchy, du théorème que *toute équation algébrique a une racine.*

Voici comment M. Sturm parle de ses obligations envers M. Fourier : « L'ouvrage qui doit renfermer l'ensemble de ses travaux sur l'analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ces précieuses recherches a été communiquée à quelques personnes. M. Fourier a bien voulu m'en accorder la lecture, et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance de ceux des travaux inédits de M. Fourier qui se rapportent à la résolution des équations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que que je vais énoncer. »

19. *Ibid.*, p. 422. — *Extrait d'un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences* (1er juin 1829).

Extension du theorème de Fourier et de celui de Descartes aux équations de la forme

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots = 0,$$

dans lesquelles α, β, γ,... sont des nombres réels quelconques.

A la fin de cet extrait, M. Sturm énonce quelques théorèmes relatifs au mouvement de la chaleur dans une sphère ou dans une barre. Ils devaient faire partie d'un Mémoire qui paraît n'avoir jamais été rédigé. M. Liouville les a démontrés très-simplement dans son Cours du Collége de France (2^e semestre 1856). Ce Cours, consacré à l'analyse des travaux de M. Sturm, nous a été très-utile pour la composition de cette Notice.

20. *Ibid.*, p. 273. — *Note présentée à l'Académie* (8 juin 1829.)

Réalité des racines de certaines équations transcendantes. Sur les coefficients des séries qui représentent une fonction arbitraire entre des limites données.

Cette Note a été refondue dans d'autres travaux de l'auteur.

21. Tome XII (1829), p. 314. — *Extrait d'un Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires.* (Présenté à l'Académie des Sciences le 27 juillet 1829.)

Etude des racines des équations qui se présentent dans l'intégration d'un système d'équations linéaires. Nombre de ces racines comprises entre deux limites données.

Cet extrait, fort étendu, peut tenir lieu du Mémoire lui-même. Dans une note, l'auteur avertit que les conclusions d'un Mémoire précédent (*voir* plus haut n° 19) s'étendent à un grand nombre d'équations transcendantes.

JOURNAL DE M. LIOUVILLE.

22. Tome I (1836), p. 106. — *Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre.* (Lu à l'Académie des Sciences le 30 septembre 1833.)

Très-beau Mémoire dans lequel les propriétés des fonctions qui satisfont à une équation différentielle sont étudiées sur cette équation même.

Une analyse de ce Mémoire a paru dans le journal l'*Institut* du 9 novembre 1833. Le même journal, dans le numéro du 30 novembre, contient une Note de M. Sturm, qui complète sa théorie.

23. *Ibid.*, p. 278. — *Démonstration d'un théorème de M. Cauchy.* (En commun avec M. Liouville.)

Théorème sur le nombre des points-racines renfermés dans un contour donné.

24. *Ibid.*, p. 290. — *Autres démonstrations du même théorème.*

25. *Ibid.*, p. 373. — *Sur une classe d'équations à différentielles partielles.*

Equations de la forme

$$g\frac{du}{dt}=\frac{dk\frac{du}{dx}}{dx}-lu.$$

Complément du Mémoire n° 22.

(*Voir* aussi *Comptes rendus*, t. IV, p. 35.)

26. Tome II, p. 220. — *Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries, etc.* (En commun avec M. Liouville.)

(*Voir* aussi *Comptes rendus*, t. IV, p. 675.)

27. Tome III, 357. *Mémoire sur l'optique.*

Surfaces caustiques formées par des rayons lumineux émanés d'un point et qui éprouvent une suite de réfractions ou de réflexions.

28. Tome VI, p. 315. — *Note à l'occasion d'un article de M. Delaunay sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante.*

29. Tome VII, p. 132. — *Note à l'occasion d'un article de M. Gascheau sur l'application du théorème de M. Sturm aux transformées des équations binômes.*

30. *Ibid.*, p. 345. — *Note sur un théorème de M. Chasles.*

Démonstration nouvelle de ce théorème : Un canal infiniment petit dont les arêtes curvilignes sont des trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau relatives à un corps quelconque, intercepte sur les surfaces de niveau des éléments pour lesquels l'attraction exercée par le corps a la même valeur.

31. *Ibid.*, p. 356. — *Démonstration d'un théorème d'algèbre de M. Sylvester.*

Ce beau théorème complète celui de M. Sturm en donnant la manière dont les différents restes se composent avec les facteurs simples de l'équation proposée.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

32. Tome IV, p. 720. — *Note sur un théorème de M. Cauchy relatif aux racines des équations simultanées.* (En commun avec M. Liouville.)

33. Tome V, p. 867. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bravais concernant les lignes formées dans un plan par des points dont les coordonnées sont des nombres entiers.*

34. Tome VII, p. 1143. — *Rapport sur deux Mémoires*

de M. Blanchet relatifs à la propagation et à la polarisation du mouvement dans un milieu élastique.

35. Tome VIII, p. 788. — *Note relative à des remarques critiques sur les travaux de M. Liouville contenues dans un Mémoire de M. Libri.*

36. Tome XIII, p. 1046. — *Mémoire sur quelques propositions de mécanique rationnelle.*

« Si les liaisons d'un système de points matériels en mouvement sont changées dans un intervalle de temps très-court, la somme des forces vives acquises avant cet intervalle surpassera celle qui aura lieu immédiatement après d'une quantité égale à la somme des forces vives correspondantes aux vitesses perdues dans le passage du premier état du système au second. »

37. Tome XX, p. 554, 761 et 1228. — *Mémoire sur la théorie de la vision.*

L'auteur explique comment la vision peut être distincte à diverses distances. Les rayons émanés d'un point, après avoir traversé les milieux inégalement réfringents qui constituent l'œil, forment une surface caustique. Pour que la vision soit distincte, il suffit qu'une partie de cette caustique, qui se réduit presque à une ligne mathématique et dans laquelle les rayons sont plus condensés que partout ailleurs, vienne rencontrer la rétine.

38. Tome XXVI, p. 658. — *Note sur l'intégration des équations générales de la dynamique.*

Théorèmes d'Hamilton et de Jacobi.

39. Tome XXVIII, p. 66. — *Rapport sur un Mémoire de M. L. Wantzel ayant pour titre :* Théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques.

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS.

40. Tome V (1834), p. 267. — *Mémoire sur la com-*

pression des liquides. (En commun avec M. Colladon.)

Ce Mémoire a remporté le grand Prix de Mathématiques en 1827. Il a aussi été publié dans les *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXII, p. 113.

41. Tome VI (1835), p. 271. — *Mémoire sur la résolution des équations numériques.* (*Voir* plus haut n° 18.)

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

42. Tome X (1851), p. 419. — *Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

MANUSCRITS.

43. Un Mémoire très-étendu sur la *communication de la chaleur dans une suite de vases.*

44. Un Mémoire *sur les lignes du second ordre,* dont les dix premiers paragraphes seulement ont paru dans les *Annales de Gergonne.* (*Voir* plus haut n^{os} 16 et 17.)

Ces deux Mémoires sont en état d'être imprimés, et M. Liouville a bien voulu se charger de leur publication.

Les autres papiers de M. Sturm contiennent des calculs relatifs à des Mémoires déjà publiés, à des extraits de ses lectures, et enfin à des recherches particulières sur les équations. La plupart de ces calculs n'étant accompagnés d'aucun discours, il est très-difficile de suivre la pensée de l'auteur. On donnera des extraits de ce qu'une patiente investigation y fera découvrir d'intéressant.

COURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

45. *Les Leçons d'Analyse et de Mécanique* ont été rédigées par des élèves de l'École Polytechnique et autographiées pour l'usage de cette école. Il n'en a été tiré qu'un petit nombre d'exemplaires.

Le texte de ces Leçons a été revu et corrigé en grande partie par M. Sturm et les théories les plus importantes ont été rédigées par lui. Leur ensemble formera quatre volumes. L'auteur de cette Notice est chargé de leur publication, conformément au désir exprimé par M. Sturm lui-même. Le premier volume paraîtra le 1er juillet prochain, et les trois autres suivront à des époques très-rapprochées.

E. Prouhet.

BIBLIOGRAPHIE.

Annales de l'Observatoire impérial de Paris, publiées par *U.-J. Le Verrier,* directeur de l'Observatoire. Tome Ier. Paris, Mallet-bachelier, imprimeur-libraire de l'Observatoire impérial de Paris, quai des Augustins, 55. In-4, vii-419 pages, une planche gravée; 1855. Prix: 27 francs (*).

Cet ouvrage fait époque. Nous assistons à la résurrection scientifique de l'Observatoire de France. Monsieur le Directeur annonce (v-vi) que chaque année on publiera les observations de l'année précédente, observations non pas *brutes*, mais *réduites*, *discutées*, *comparées* avec la théorie. Ces opérations, qui sont vitales pour l'astronomie, exigent des données précises, la construction de Tables *exactes*, *commodes*, d'une préparation longue et pénible. Ces données et ces Tables, en cours d'exécution, seront également publiées. En attendant, le célèbre directeur insérera dans les *Annales,* sous le titre de *Recherches astronomiques* (**), des Mémoires sur plu-

(*) Les tomes II et III sont *sous presse.*

(**) C'est aussi le titre d'un ouvrage de Bessel, *Astronomische untersuchungen.*

sieurs points de la science, et des chapitres didactiques destinés à résumer les formules et les théories les plus usuelles.

Ce volume commence (1-68) par un Rapport au Ministre de l'Instruction publique sur l'Observatoire impérial de Paris et projet d'organisation (décembre 1854).

On peut distinguer dans ce Rapport trois parties :

1°. *Historique.*

Un exposé historique succinct, lucide, instructif, des progrès de la science depuis Hipparque jusqu'à Herschel, Olbers, Bessel. L'astronomie complète comprend l'uranoscopie et l'uranologie. M. Le Verrier fait ressortir avec force et raison que l'uranoscopie, c'est-à-dire l'art d'observer avec précision, a créé l'astronomie et en est le fondement. Kepler dit qu'il a été mis sur la voie de réformer toute l'astronomie par les efforts qu'il a faits pour faire disparaître dans l'orbite de Mars une différence de *huit minutes* que présentaient les observations de Tycho comparées avec la théorie. Aujourd'hui, depuis l'admirable découverte de Neptune, qui a rectifié les écarts du mouvement d'Uranus, dans toutes les planètes les erreurs ne s'élèvent plus qu'à *quelques secondes;* comme elles existent partout, on ne peut pas les négliger et il faut s'efforcer de les faire disparaître. Ce plaidoyer en faveur de l'*observation* est d'autant plus méritoire, que l'auteur doit sa célébrité uniquement à des travaux uranologiques. La *Mécanique céleste,* qui a donné une si forte impulsion à la théorie, a eu en France la malheureuse conséquence de faire négliger et même de faire dédaigner, reléguer au second rang l'uranoscopie. On attacha plus d'importance à établir des séries convergentes qu'à installer des instruments de précision. Aussi « l'Observatoire de Paris, nous » sommes forcé de l'observer, n'a pris aucune part aux

» études d'astronomie sidérale : tout ce grand mouvement s'est accompli en dehors de lui. » (P. 31.) On doit ajouter que ce n'est qu'en 1852 qu'on a découvert en France le premier astéroïde ; que cette découverte a été faite à Paris, *en dehors de l'Observatoire*, par un *étranger*, intelligent amateur d'investigations célestes (*).

Décrivant la formation et l'organisation des mondes, le style répond toujours à l'élévation du sujet, et rappelle souvent, par sa majestueuse simplicité, Laplace, Fourier, Arago. C'est une lecture agréable à tout homme instruit, obligée pour tout professeur de cosmographie.

2°. *État de l'édifice et des instruments.*

Il est indispensable, pour la précision, que la température des salles soit égale à celle de l'air extérieur. « A Poulkova, les murailles sont en bois, et la pénétration de la » chaleur à travers le toit est combattue par une épaisse » couche de terre glaise. De larges fenêtres, ouvertes en » temps convenable, permettent d'obtenir la même tem- » pérature à l'intérieur qu'à l'extérieur. Ces précautions » n'ont pas été prises à Paris et à l'égard de la salle aux » observations. La couverture, entièrement *métallique*, » et disposée en forme de caisson, concentre et transmet » à l'intérieur, dans les beaux jours, une forte portion » de la chaleur qu'elle reçoit du soleil. Il en est de même » des murailles, qui sont épaisses et complétement con- » struites en pierre. Aussi la température de la salle » reste-t-elle presque toujours pendant les nuits, et quel- » que soin qu'on ait d'ouvrir les fenêtres, plus élevée » que la température extérieure. C'est souvent le con- » traire pendant le jour. » (Page 19.)

(*) M. Goldschmidt, peintre allemand. Polymnie a été decouverte en 1854 à l'Observatoire par M. Chacornac, assidu et zelé astronome.

Il est encore indispensable, pour certaines observations, qu'on puisse se procurer un horizon artificiel, tel qu'un bain de mercure qui réfléchisse nettement les images. « Or l'incertitude des images est telle, que la plupart » du temps il est difficile de les observer. Le mal pro- » vient ici de deux causes : de la situation de l'obser- » vatoire *au sein d'une grande ville* et de la *vicieuse* » *construction* de l'observatoire lui-même. Lorsque je » cherchai, il y a huit mois, à introduire l'usage indis- » pensable du bain de mercure dans le service régulier de » l'Observatoire, aucune observation n'était habituelle- » ment possible pendant le jour. Dans la nuit, on pou- » vait obtenir un bain assez calme; mais alors une voi- » ture, même assez légère, venait-elle à entrer dans » Paris, en franchissant une des barrières Saint-Jacques » ou d'Enfer, l'observateur était prévenu de sa présence » par une légère trépidation du mercure. Bientôt, en ef- » fet, on entendait la voiture s'avancer, et lorsqu'elle » était parvenue dans les environs de l'Observatoire, l'a- » gitation du mercure était telle, que toute observation » devenait impossible au cercle : souvent même le bruit, » empêchant d'entendre les battements de la pendule, » forçait l'observateur à la lunette de s'arrêter à son » tour. » (Page 20.)

Instruments de passage.

La force de la lunette méridienne de Greenwich est à celle de la lunette de l'Observatoire de Paris comme 16 est à 9, « c'est-à-dire presque double. Ce fait n'a pas be- » soin de commentaire. Nombre de petits astres, que » nous ne pouvons voir dans la lunette méridienne de » Paris, sont observés à Greenwich; et quant à ceux que » nous pouvons apercevoir, comme ils nous apparaissent » deux fois plus faibles qu'à Greenwich, il est trop évi-

» dent que nous en fixons plus difficilement la position. » (Page 14.)

Défauts de l'instrument. **1°. Il existe entre les diamètres des deux tourillons une petite différence. 2°. L'axe de rotation de la lunette n'a pas la stabilité nécessaire. 3°. L'axe optique de la lunette laisse aussi à désirer.**

Cercle de déclinaison de Gambey.

« La lunette du cercle de déclinaison est encore plus » faible que la lunette méridienne. Tandis qu'à l'égard de » la puissance optique, les instruments de passage de » Greenwich et Paris sont dans le rapport de 16 à 9, ainsi » que nous l'avons vu plus haut, les instruments qui ser- » vent à la mesure des déclinaisons sont dans le rapport » de 16 à 7! Aussi, tandis qu'à Greenwich les observa- » tions de toutes les petites planètes peuvent être faites » sans difficulté et avec exactitude, il arrive les trois » quarts du temps à Paris, qu'après avoir attendu jusqu'à » une heure ou deux heures du matin, les observateurs » sont réduits à inscrire sur le registre que, nonobstant la » beauté du ciel, il leur a été impossible de voir l'astre; » ou bien, si l'on est parvenu à l'observer à la lunette » méridienne, sa détermination au cercle n'a pu être ef- » fectuée, le second instrument étant plus faible que le » premier. Aussi l'observation est incomplète : d'où ré- » sultent deux conséquences : un découragement profond » atteint inévitablement les observateurs consciencieux, » et, ce qui est plus grave, lorsque les observations se- » ront publiées, elles se trouveront, vis-à-vis des obser- » vations étrangères, dans un état d'infériorité impos- » sible à supporter. » (Page 18.)

Grande lunette parallatique.

Il s'est passé pour cet instrument des choses d'une étrangeté incroyable. Il semble que le bâtiment, la lunette, le pied et la base aient été construits isolément sans penser à les mettre en relation. Ainsi les deux tiers de la surface du plateau, destinée à porter un poids de 7 à 8000 kilogrammes, sont en porte-à-faux. Le poids d'un homme placé sur le bord de la plaque, lui imprime une flexion très-notable (p. 33); bien plus, les dimensions du pied ont été établies sur une lunette ayant 8 mètres de distance focale; on a reconnu depuis que la distance focale est plus longue de 8 décimètres. Cet excès de dimension a des conséquences fâcheuses; « car si l'on considère que, tout en remplissant les conditions posées ci-dessus, il faut encore faire en sorte, d'une part, de ménager à l'astronome une place suffisante pour qu'il puisse observer dans la position verticale de la lunette, et de l'autre, que cette lunette puisse s'abattre dans une position horizontale sans heurter les parois de la coupole. » (Page 34.)

3°. *Palliatifs.*

Dire la vérité à un malade sur sa situation est souvent l'acte d'un méchant; lorsque ce malade est une institution publique ayant un intérêt national, dire la vérité est le devoir d'un bon citoyen, et M. Le Verrier a bien mérité du pays en montrant l'état au vrai. Il indique aussi les remèdes. Cette troisième partie est la partie faible de ce beau Rapport. Les remèdes ne sont que d'impuissants palliatifs, tandis qu'il faut un remède héroïque. Le célèbre Directeur déclare que, quoi qu'on fasse, on ne fera jamais de l'observatoire actuel qu'un observatoire de *second ordre.* « Mais entreprendre de refaire avec les dispositions » actuelles un observatoire de *premier ordre,* ce qui exigerait qu'on rectifiât les fondations et qu'on en fît de nouvelles pour les collimateurs, qu'on modifiât compléte-

» ment la construction de la salle elle-même, qu'on ac-
» crût enfin le pouvoir optique des instruments en même
» temps qu'on y introduirait des modifications mécani-
» ques, c'est-à-dire, en un mot, *tout changer*, construc-
» tions et instruments, constituerait une entreprise qui
» donnerait beaucoup plus de peine et coûterait beaucoup
» plus cher qu'une construction nouvelle. » (Page 22.)

Second ordre n'est pas français. La nation doit être partout au premier rang. Pour cela que faut-il faire? Écoutons encore M. Le Verrier. « Déjà la Russie s'était
» signalée par la culture de l'astronomie, notamment
» dans l'observatoire de Dorpat, lorsque son gouverne-
» ment résolut de fonder un observatoire modèle, supé-
» rieur à tout ce qu'on avait édifié jusque-là. L'empereur
» accorda un crédit *illimité* pour la fondation du nou-
» vel établissement, choisit lui-même l'emplacement, et
» ordonna que la construction des instruments serait
» mise au concours entre les artistes de toute l'Europe.
» L'exécution de ce vaste plan, confiée à l'un des plus
» éminents astronomes de l'époque, ancien directeur de
» Dorpat, fut digne de la pensée du fondateur. En 1838,
» l'observatoire était construit, les instruments installés.
» Sur le crédit illimité accordé pour la construction, il
» avait été dépensé une somme de *deux millions et demi,*
» indépendamment du prix du terrain. Enfin l'observa-
» toire recevait une dotation *annuelle* de *quatre-vingt*
» *mille* francs. » (Page 12.)

La position financière de la France est-elle moins bonne que celle de la Russie? Devons-nous reculer devant une dépense que la Russie a faite et fait encore annuellement? Les vainqueurs d'Alma seront-ils vaincus à Pulkova? Croît-on que le souverain qui a achevé le Louvre, changé Paris en une ville monumentale, rendu au pays sa prépondérance politique et militaire, croit-on que Napoléon III sera moins bien disposé, se montrera moins libéral envers la plus sublime des sciences qu'un empereur de Russie? *Absit, absit.* M. Le Verrier n'a qu'à vouloir, et bientôt nous verrons s'élever aux environs de Paris un observatoire du *premier ordre,* et bientôt aussi, grâce au génie français, il s'y formera des *astronomes du premier ordre.* Une puissante impulsion serait l'établissement d'observatoires secondaires dans nos principaux ports, en Algérie, dans nos colonies, et surtout dans la Nouvelle-Calédonie, récente possession (*). Que de découvertes à faire dans l'hémisphère austral? Nous ne savons rien sur les aurores *australes:* phénomène qui, bien étudié, paraît destiné à nous révéler un jour de grands mystères.

Nous consacrerons un second article aux *Recherches astronomiques.*

Récréations mathématiques, composées de plusieurs problèmes plaisants et facétieux en fait d'arithmétique, géométrie, méchanique, optique et autres parties de ces belles sciences. Seconde édition, reveue, corrigée et augmentée. A Paris, chez Rollet Boutonné, au Palais, en la gallerie des libraires. MDCXXVI. Petit in-8 de 188 pages.

La dédicace est signée H. Van Etten. C'est un pseudonyme. L'ouvrage est du P. Jean Leurechon, jésuite lorrain. La première édition est de Pont-à-Mousson, 1624. Cette seconde édition, de Paris, a été revue la même année par Denis Henrion. Il y a deux éditions de Rouen (1627 et 1628); une autre de Paris (1630), donnée

(*) Lire une Lettre de M. Caillet, examinateur hydrographe, contenant à ce sujet d'excellentes vues telles qu'on peut les attendre d'un savant si compétent, d'un calculateur si exercé (*Annales de l'Observatoire impérial de Paris*, tome Ier, page 47).

par Claude Mydorge, le célèbre ami de Descartes. La cinquième et dernière édition est de Paris 1661.

L'arithmétique renferme des questions pour deviner des nombres pensés, des objets cachés, etc.; on les trouve déjà dans le *Lilawati* et dans l'*Anthologie grecque*, et plusieurs se sont conservées dans nos Traités d'Algèbre. Le 74^e problème roule sur l'aimant. On y lit (p. 96) :

« Quelques-uns ont voulu dire que par le moyen d'un
» aimant ou autre pierre semblable les personnes ab-
» sentes se pourroient entreparler. Par exemple, Claude
» étant à Paris et Jean à Rome, si l'un et l'autre avait
» une aiguille frottée à quelque pierre, dont la vertu fût
» telle, qu'à mesure qu'une aiguille se mouvrait à Paris,
» l'autre se remuât tout de même à Rome, etc. »

L'électricité s'est chargée de résoudre le problème posé en 1636.

Le problème 86 (p. 143) traite des canons et comment on peut lancer des boulets sans *pouldre* au moyen de la vapeur d'eau employée comme force projective (*).

Les *Récréations mathématiques* de Jacques Ozanam (1648, 1694, 1735, la même édition avec la date 1741) ont fait oublier celles du jésuite. On a encore sous le même titre un ouvrage de Guyot (Guillaume-Germain) en 4 volumes in-8 de 1769. Enfin Montucla a publié des *Récréations mathématiques*, d'abord sous le pseudonyme de Chanla, géomètre forésien, Paris, 1778, et avec les lettres initiales de son nom une nouvelle édition en 1790.

Muser (F.-W) a publié en allemand des *Récréations arithmétiques*; Munster, 1831; et Cattois (C) : *Calendrier mental grégorien* ou *Curiosités mathématiques, utiles, instructives et amusantes*. In-12; Orléans, 1852.

(*) C'est ce que Perkins a voulu réaliser naguère.

Des Méthodes en Géométrie, par M. *Paul Serret*, professeur de mathématiques. Paris, Mallet-Bachelier, 1855. In-8 de XVI-144 pages. Prix : 6 francs (*).

Les philosophes distinguent deux grandes routes ou méthodes générales propres à conduire à la connaissance de la vérité, savoir : l'analyse et la synthèse; et, suivant leur habitude, ils ont beaucoup disserté sur les caractères essentiels de chacune de ces méthodes ainsi que sur la préférence qu'il convient d'accorder à l'une ou à l'autre. Les géomètres se mêlent rarement à de pareilles discussions : d'abord ils ne voient pas ce que la science peut gagner à une description minutieuse de l'analyse et de la synthèse, car l'important n'est pas de savoir, dans le dernier détail, en quoi consiste une méthode, mais plutôt d'en tirer un heureux parti; ensuite la question de préférence leur semble tout à fait oiseuse et même nuisible. Elle revient, comme l'observe judicieusement le rédacteur de ce journal, à se demander ce qui vaut le mieux de notre bras droit ou de notre bras gauche. Ainsi posée, il n'y a pas besoin de philosophie pour la résoudre : le bon sens suffit.

On prend quelquefois le nom de méthode dans une acception plus restreinte, et l'on désigne ainsi certains procédés généraux au moyen desquels on peut traiter toute une classe de questions : telles sont la méthode des coordonnées, celle des projections, etc. Toutes sont bonnes quand elles conduisent rapidement au but. Les meilleures sont celles qui ont le caractère de l'intuition, et qui nous font découvrir, presque sans effort, une longue suite de vérités. « Pour connaître, dit M. Chasles (**),

(*) M Paul Serret vient de présenter à l'Académie un Mémoire sur la théorie géométrique des courbes à double courbure. Commissaires, MM. Cauchy, Bertrand.

(**) *Aperçu historique*, page 115.

si l'on a rencontré les vraies routes de la vérité définitive et pénétré jusqu'à son origine, nous croyons pouvoir dire que, dans chaque théorie, il doit toujours exister, et que l'on doit reconnaître, quelque vérité principale dont toutes les autres se déduisent aisément, comme simples transformations ou corollaires naturels; et que cette condition accomplie sera seule le cachet de la véritable perfection de la science. Nous ajouterons, avec un des géomètres modernes qui ont le plus médité sur la philosophie des mathématiques (M. Gergonne), « qu'on ne peut se » flatter d'avoir le dernier mot d'une théorie, tant qu'on » ne peut pas l'expliquer en peu de paroles à un passant » dans la rue. » Et en effet les vérités grandes et primitives, dont toutes les autres dérivent, et qui sont les vraies bases de la science, ont toujours pour attribut caractéristique la simplicité et l'intuition. »

M. Paul Serret, déjà avantageusement connu des lecteurs de ce journal, s'est proposé, comme l'indique le titre de son ouvrage, de faire connaître les divers procédés que l'on peut employer pour résoudre les questions de géométrie, et il a pensé avec raison que le meilleur moyen de les enseigner était de les appliquer à un certain nombre de questions choisies.

La première Partie de l'ouvrage de M. Serret (1-43) traite des *méthodes relatives à la géométrie des figures finies* et est divisée en deux chapitres.

Le chapitre I^{er} (1-21) commence par quelques réflexions sur l'utilité d'une classification des méthodes. L'auteur ne se dissimule point qu'une pareille classification n'ait quelque chose d'arbitraire et que des méthodes données comme distinctes ne puissent se confondre dans certains cas. Malgré ces inconvénients inévitables, mais dont il ne faut pas s'exagérer l'importance, une classification aura l'avantage de présenter dans un certain ordre un nombre fini de moyens parmi lesquels des essais successifs feront connaître celui qui convient à la question proposée.

Après avoir caractérisé en peu de mots l'analyse et la synthèse, M. Paul Serret décrit onze méthodes particulières, mais sans prétendre faire une énumération complète.

1° Méthode *par substitution*, qui consiste à faire dépendre la solution de la question proposée d'une question plus simple, celle-ci d'une troisième, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à un dernier problème dont la solution soit évidente ou simplement connue; 2° *par construction*, qui consiste à substituer à la définition en langage ordinaire de certains éléments d'une figure une construction équivalente qui met souvent en lumière des relations utiles à la solution de la question; 3° *par duplication*, quand on fait tourner une figure autour d'un axe pour lui donner une position symétrique de celle qu'elle occupait d'abord; 4° *par abstraction et généralisation*; 5° *par composition et décomposition*; 6° *par les limites*; 7° *par réduction à l'absurde*; 8° *par inversion*, lorsque, renversant la question, on prend pour inconnues les quantités données et réciproquement; 9° *par les lignes, les aires ou les volumes auxiliaires*; 10° *par les solides auxiliaires*, c'est-à-dire par l'emploi de la géométrie à trois dimensions, dans les questions de géométrie plane; 11° *par la transformation des figures*.

M. Serret donne des exemples bien choisis de chacune de ces méthodes : mais comme la dernière lui paraît d'une importance fondamentale, il lui consacre en entier le chapitre II (21-44) dans lequel il expose les procédés de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Nous y avons remarqué d'élégantes démonstrations des principes de la trigonométrie sphérique et un théorème analogue à celui de Legendre sur les triangles dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.

La seconde Partie (44-144) traite *des méthodes relatives à la géométrie infinitésimale*. Elle est divisée en six chapitres.

Le chapitre Ier est consacré aux tangentes. On y trouve un exposé très-complet et très-instructif des méthodes d'Archimède, de Descartes, de Fermat et de Barrow.

Le chapitre II traite des courbes enveloppes et en particulier des caustiques.

Dans le chapitre III, on trouve une théorie complète du cercle osculateur. M. Serret fait connaître avec un grand détail les travaux de Maclaurin et de M. Ch. Dupin sur ce sujet.

Les chapitres IV et V se rapportent à la *théorie des maxima et des minima absolus ou relatifs*.

Le chapitre VI a pour objet la méthode *par décomposition en éléments correspondants*. L'attraction d'une sphère sur un point extérieur, la rectification des épicycloïdes, la théorie des courbes tautochrones, le théorème de Fagnano sont les principales applications que l'auteur fait de cette importante méthode.

En résumé, M. Paul Serret a composé un livre plein de choses, et dont nous ne saurions trop recommander la lecture aux élèves et aux professeurs.

On doit savoir gré à l'auteur, dont l'érudition paraît si étendue, de nous avoir fait connaître tant de procédés ingénieux employés par les plus grands géomètres des temps passés et que notre insouciance condamnait à l'oubli. Il rend en cela un grand service à la science, car, suivant la judicieuse réflexion de M. Poncelet, dans le passage qui sert d'épigraphe au livre de M. Serret : « Ce ne sont pas tant les vérités particulières que les méthodes qu'il ne faut pas laisser périr. »

E. PROUHET.

THÈSES PRÉSENTÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS pour obtenir le grade de docteur ès Sciences; par M. *Guiraudet*, agrégé de l'Université, professeur-adjoint de mathématiques au lycée Saint-Louis :

THÈSE DE MÉCANIQUE. — Recherches sur le mouvement d'un point libre rapporté à des coordonnées curvilignes; suivie d'une proposition de mécanique céleste (attraction des ellipsoïdes) donnée par la Faculté.

THÈSE D'ANALYSE. — Aperçu historique au sujet des problèmes auxquels s'applique le calcul des variations, jusqu'aux travaux de Lagrange.

Soutenues le 17 mars 1856 devant la Commission d'examen composée de MM. Duhamel, *président*, Lamé et Puiseux, *examinateurs*. Paris, in-4° de 54 pages.

Soient trois surfaces données par des équations et renfermant explicitement ou implicitement le *temps* comme paramètre variable. A chaque instant ces surfaces, deux à deux, se coupent suivant une ligne; les intersections de ces trois lignes d'intersection déterminant, généralement parlant, la position d'un point, sont dites les *lignes coordonnées* de ce point; le temps variant, ce point décrit dans l'espace une ligne nommée sa *trajectoire;* les formules dynamiques font connaître, à chaque instant, la vitesse du point, grandeur et direction; les forces, accélératrices et centripètes, qui l'animent, causes efficientes du mouvement.

Le but de cette thèse est de trouver des formules qui donnent ces quantités dynamiques considérées dans les *lignes coordonnées*. Supposons que ces lignes soient des droites. On peut considérer le point comme se mouvant sur une des droites pendant que cette même droite se meut sur la seconde droite, qui se meut elle-même sur la troisième droite; les lois de ces trois mouvements étant données, on peut déterminer les trois quantités dynamiques relativement à chacune de ces droites et aussi les pressions exercées sur les trois plans passant par les droites prises deux à deux. Les mêmes considérations s'appliquent à des lignes coordonnées quelconques; ce sont ces mouvements de lignes coordonnées que le savant auteur de la thèse désigne sous le nom de *mouvements d'entraînement*. Ils sont extrêmement simples, intuitifs, et amènent des formules qui, pour être très-générales, sont pourtant très-symétriques, courtes, élégantes et susceptibles de nombreuses applications.

L'auteur choisit les surfaces orthogonales; les lignes coordonnées sont des droites. Soient

$$\begin{aligned} \rho &= f(xyz), \\ \rho_1 &= f_1(xyz), \\ \rho_2 &= f_2(xyz) \end{aligned}$$

les équations de trois de ces surfaces; les ρ sont des paramètres variables avec le temps. Faisant

$$h_1^2 = \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2$$

et désignant par R la pression sur la surface R, agissant suivant la normale à cette surface, on trouve

$$\mathrm{R} = \frac{1}{h}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{1}{h^2}\frac{dh}{d\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{h}{h_1^3}\frac{dh_1}{d\rho}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \frac{h}{h_2^3}\frac{dh_2}{d\rho}\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2$$
$$- \frac{2}{h_2}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{2}{h^2}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\rho_2}{dt},$$

et deux autres expressions semblables pour R_1 et R_2; ce sont les équations (A), et dans une note l'auteur montre la coïncidence de ces expressions avec celles de Lagrange.

Si l'on désigne par v_1, v_2, v_3 les trois composantes de la vitesse des mobiles; par γ_1, r_2 les valeurs des rayons de courbure pour la surface (ρ) à leurs points d'intersection; par γ_2, c les valeurs des rayons de courbure pour la surface (ρ_1) à leurs points d'intersection; par γ_3, c_1 les valeurs des rayons de courbure pour la surface (ρ_2) à leurs points d'intersection; l'équation pour R se change en celle-ci

$$\mathrm{R} = \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{v_1^2}{\gamma_1} + \frac{\dot{v}_2^2}{c_2} - \frac{2vv_1}{c} - \frac{2vv_2}{\gamma};$$

où $d\rho$ est l'arc élémentaire décrit par le point. De même pour R_1, R_2.

Ce sont les équations (B), d'une élégance remarquable et qui sont le pivot de toutes les déductions. L'auteur y parvient d'abord par le calcul et ensuite par des moyens géométriques.

Ces généralités terminent la thèse, mais elle débute par des considérations sur des coordonnées polaires planes et sphériques qui facilitent la compréhension de vues plus élevées.

La seconde thèse est un exposé historique très-clair des travaux sur le calcul des variations depuis Newton jusqu'à Lagrange (*voir* Strauch, *Nouvelles Annales*, t. X, p. 433). Nous répétons pour la centième fois que *Bernoulli* ne s'écrit pas *Bernouilli.* Il est désagréable de voir un géomètre ne pas savoir orthographier un nom aussi illustre. Comment un prote laisse-t-il passer un tel barbarisme?

Nous étudions, pour en rendre compte, une thèse fort remarquable de M. Houel sur l'intégration des équations fondamentales de mécanique et les applications de la méthode Hamilton aux perturbations de Jupiter. Ce sont des travaux qui restent; tandis que le temps, ce formidable balai, jettera dans le gouffre de l'oubli le fatras mathématique qui fait invasion de toute part.

Ramus (Pierre de la Ramée), sa vie, ses écrits et ses opinions; par *Charles Waddington*, professeur agrégé de philosophie à la Faculté des Lettres de Paris et au lycée Louis-le-Grand. Paris, 1855; in-8 de 480 pages.

On entend souvent citer, d'après Royer-Collard, que le respect s'en va. Je crois qu'on n'a pas bien compris la pensée du philosophe. En effet, le respect, cet hommage rendu à la vertu, est un sentiment qui ne dépend pas de la volonté. Il nous est imposé par ce tribunal que la puissance divine a érigé au dedans de nous : par la conscience qui dicte ses sentences sans nous consulter, et nous fait obéir intérieurement, quelles que soient nos actions extérieures (*). Le respect implanté dans l'organisation ne peut pas plus s'en aller que la respiration. Prenez l'homme d'Horace, le *justum et tenacem propositi virum,* celui qui persévère à soutenir une cause juste, non-seulement au prix de la vie, ce qui est peu, mais au prix de la fortune, de l'existence sociale, du repos, et chacun s'inclinera forcément. Tandis que s'il y a des gens dont les opinions, les principes, les actions tourneboulent au gré de leurs intérêts, de leurs passions et dont les actions sont aux antipodes de la morale qu'ils écrivent: *qui Curios simulant et Bacchanalia vivunt ;* vous pourrez rechercher leur protection s'ils sont puissants, accorder de l'estime à leur talent, de l'admiration à leur génie, vous pourrez leur accorder tout, tout excepté le respect. C'est à ces gens que Royer-Colard a peut-être fait allusion, et alors son assertion peut se traduire ainsi : *Les hommes respectables s'en vont.* Quoi qu'il en soit, l'homme d'Horace au XVI^e^ siècle, c'est Ramus. Le génie le plus vaste, le plus profond du XVI^e^ siècle, c'est encore Ramus.

Petit-fils d'un charbonnier, fils d'un pauvre laboureur,

(*) *Vox Dei,* c'est la conscience. *Vivimus in Deo,* dit saint Jean, répète Mallebranche. La réciproque est vraie aussi.

toutefois champion inébranlable de la raison, de la vérité, de la science, profligateur inexorable du vice, du mensonge, de l'ignorance, restaurateur des connaissances humaines en Europe, fondateur de l'enseignement mathématique en France, tel était Pierre de la Ramée. Tel est le résumé de cette vie écrite avec une rare impartialité, dans un style simple et avec une élévation de sentiments digne du sujet. Le jeune professeur n'a pas reculé devant des investigations pénibles et minutieuses pour nous reproduire les moindres linéaments sans confusion de cette admirable physionomie d'un athlète de la raison, d'un Hercule qui, le premier, a balayé d'un bras vigoureux les écuries de la scolastique, et dont la vie a été constamment militante : *Socratis præter cicutam nihil nobis admodum abfuit* (*Schol. math.*, lib. III). Lutte contre la misère, lutte contre des misérables qui, ne pouvant le terrasser, l'ont fait égorger. Agé d'environ 59 ans, il a été *éventré,* traîné dans les rues le 24 août 1572. Sa dernière parole est : *Pardonne-leur, ils ne savent ce qu'ils font,* et comme chez le Juste de Jérusalem, la plèbe est l'instrument du crime; le bras est dans la classe supérieure.

M. Waddington nous fait connaître le précurseur de Galilée, de Descartes. Sans Ramus, auraient-ils pu se produire? M. Waddington, juge éminemment compétent, nous fait connaître l'orateur cicéronien, le grand réformateur de la grammaire, de la logique, de l'enseignement des lettres et de la philosophie. Esprit indépendant, Ramus n'admet d'autre autorité que la raison. *Amicus Plato, amicus Socrates, magis amica veritas, et tamen istius antiquæ philosophiæ severitas nulla unquam in arte major quam in mathematis fuit, in quibus nulla authoris cujusquam quantumlibet præstantis excellentis authoritas pro argumento fuerit : ratione opus est eaque necessaria, secus ignorantia judicatur* (*Schol. mathem.*, lib. III).

« Aimons Platon, aimons Socrate, mais plus encore la vérité. Dans aucune partie de la philosophie ancienne, on ne rencontre une telle rigueur que dans les mathématiques. Là, l'autorité d'un écrivain, quelque distingué qu'il soit, ne passe pas pour un argument ; la raison, voilà ce qu'il faut et une raison convaincante. Autrement, on est taxé d'ignorance. »

Comme toutes les natures fougueuses rencontrant d'injustes et de sottes résistances, souvent Ramus dépasse malheureusement le but. Prochainement nous mettrons en regard le géomètre, mais il faut lire M. Waddington et écouter M. Cousin :

« Quelle vie! quelle fin! Sorti des derniers rangs du
» peuple, domestique au collége de Navarre, admis par
» charité aux leçons des professeurs, puis professeur lui-
» même ; tour à tour en faveur et persécuté, banni, rap-
» pelé, toujours suspect, il est massacré dans la nuit de la
» Saint-Barthélemy, comme protestant et à la fois comme
» platonicien.... Depuis, on n'a pas daigné lui élever le
» moindre monument qui gardât sa mémoire ; il n'a pas
» eu l'honneur d'un éloge public, et ses ouvrages mêmes
» n'ont pas été recueillis. »

Lorsqu'on élève tant de statues au Louvre, pourquoi oublierait-on Ramus? N'est-il pas aussi célèbre, aussi connu que Cambiche et Dupéras? N'y-a-t-il pas autant de mérite d'avoir donné une direction rationnelle aux études dans toute l'Europe que d'avoir tracé une corniche, imaginé un entablement? Ramus avec Calvin est un des premiers qui aient cultivé la langue française. Pourquoi l'Académie française, au milieu de tant d'Eloges, oublie-t-elle l'éloge de Ramus? Pourquoi un de ses illustres membres, qui nous rappelle sans cesse les événements, les personnages et surtout le style magique du grand siècle ; pourquoi M. Cousin ne fait-il pas cesser cet oubli, qui est presque de l'ingratitude?

LOGARITHMIC TABLES to seven places of decimals, containing logarithmic sines and tangents to every second of the circle, with arguments in space and time; by *Robert Shortrede,* F.R.A.S, etc. Edinburgh, 1849. In-8, titre et préface IV pages, Tables 597 pages.

Chaque Table contient les logarithmes des sinus, tangentes, cotangentes, cosinus avec sept décimales et les arcs croissant de seconde en seconde depuis $0^\circ\ 0'\ 1''$ jusqu'à $44^\circ\ 59'\ 60''$, et les arcs (*space*) sont aussi réduits en temps (*time*) : 4 secondes de temps correspondent à 1 minute circulaire. Les rectangles qui renferment les quatre lignes trigonométriques ci-dessus dénommées sont divisés chacun en trois colonnes et chaque colonne contient soixante logarithmes; au bas de chaque colonne, la moyenne commune différence est donnée avec les figures décimales. A droite de chaque page, on trouve les parties proportionnelles en dixièmes de secondes circulaires et en centièmes de secondes de temps. Pour le premier degré où les différences varient sensiblement d'une seconde à la suivante, l'auteur se sert d'un coefficient pour corriger les secondes différences, ou bien encore de ces deux formules de Maskelyne

$$\log \sin x = \log \sin 1'' + \log x'' - \frac{1}{3} \log \text{séc}\, x,$$

$$\log \text{tang}\, x = \log \text{tang}\, 1'' + \log x'' + \frac{2}{3} \log \text{séc}\, x,$$

x étant un très-petit arc.

L'ouvrage est terminé par des formules trigonométriques et par les logarithmes et cologarithmes de plusieurs constantes qui se présentent dans les calculs arithmétiques et trigonométriques. La première édition est de 1844. Elle renfermait aussi les logarithmes des nombres de 1 à 120000; dans la seconde édition, les logarithmes des nombres forment un volume à part. M. Shortrede était employé dans le grand levé topographique exécuté par les Anglais dans les Indes orientales.

LOGARITHMIC TABLES, containing logarithms to numbers from 1 to 120000; numbers to logarithms from 0 to 100000 to seven places of decimals; Tables with centesimal and decimal arguments for finding logarithms and antilogarithms as far as sixteen and twenty-five places; Tables to five places for finding the logarithms of the sums and differences of antilogarithms; also Tables for barometric and thermometric heights: together with several other Tables of frequent use; by *Robert Shortrede,* F. R. A. S., capitain, first assistant in the great trigonometrical Survey of India. Edinburgh, 1849. In-4; préface xxv pages, Tables 209 pages.

La première édition, de petit format, a paru en 1844; celle-ci est considérablement améliorée et augmentée. La préface consiste en une introduction.

1°. Nature et propriétés des logarithmes; théorie exponentielle.

2°. Calcul des logarithmes par séries; formules de Borda et de Delambre.

3°. Calcul des logarithmes par la méthode des différences.

4°. Sur le calcul des antilogarithmes; en rendant compte de l'ouvrage de Dodson, le premier qui ait paru sur les antilogarithmes, nous donnerons une formule de Legendre pour calculer ces antilogarithmes.

5°. Sur les Tables pour trouver avec un grand nombre de chiffres les logarithmes et les antilogarithmes.

6°. Avantages du système de Briggs relatifs à la caractéristique.

7°. Sur les logarithmes des fractions.

8°. Construction des Tables pour trouver les logarithmes des sommes et des différences des logarithmes.

Soit d un nombre donné,

$$A = \log x,$$

$$A_1 = d + \log x = \log 10^d x = \log x_1,$$

$$B = \log(1 + x),$$

$$B_1 = \log(1 + x_1),$$

$$C = A - B = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1},$$

$$C_1 = \log\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{-1},$$

$$\Delta B = B_1 - B = \log\left[1 + \frac{x}{1 + x}(10^d - 1)\right],$$

$$\Delta C = C_1 - C = \log\left[1 - \frac{1 - 10^{-d}}{1 + x}\right]^{-1};$$

on développe ΔB et ΔC par les méthodes connues et on fait successivement

$$d = 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001, \ldots.$$

La Table I contient les logarithmes avec 7 décimales des nombres depuis 1 à 120000; l'argument sexagésimal correspondant à chaque nombre est placé dans une colonne serrée à gauche. Les différences et leurs multiples sont au bas de la page, ce qui est plus commode que lorsqu'elles sont placées latéralement (pages 2 à 110).

La Table II contient les antilogarithmes ou les nombres correspondants aux logarithmes; ceux-ci croissent par dix-millièmes. Exemples : Aux logarithmes 29300, 29301 correspondent les nombres 1963360, 1963405; ces deux derniers nombres sont écrits dans la même ligne horizontale, et la partie commune 196 est seulement écrite pour le nombre qui correspond à 29230, où elle apparaît pour la première fois (pages 112-195).

La Table III contient les longueurs des arcs circulaires en degrés, minutes et secondes (moitié de la page 195).

Les Tables IV, V, VI, VII servent à calculer, avec un grand nombre de figures décimales, les logarithmes, antilogarithmes et logarithmes de Gauss. On ne peut en donner une exposition claire, qu'en ayant les Tables sous les yeux (pages 196-203). Elles contiennent les valeurs numériques des constantes qui entrent dans les formules.

La Table VIII donne les logarithmes des produits continuels des nombres naturels au-dessous de 1000, ou

$$\log(1.2.3\ldots x) \text{ et } x = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 1000 \text{ (page 205).}$$

La Table IX, comparaison entre les degrés du thermomètre Farenheit et centésimal.

La Table X pour la mesure des hauteurs par le baromètre, ayant égard à la latitude, à l'état thermométrique et hygrométrique de l'atmosphère (pages 206-207).

La Table XI, mesure des hauteurs par le thermomètre avec les mêmes éléments que pour la Table IX (on indique les corrections qu'il faut faire aux résultats d'après les expériences de M. Regnault faites depuis l'impression de la Table) (page 207).

L'ouvrage est terminé par une Table de constantes (page 208).

SUR L'ORIGINE DES MOTS CHIFFRE ET ZÉRO

(voir page 103);

D'APRÈS NESSELMAN.

En arabe le mot *sifr* signifie ce qui est vide et désigne le zéro. C'est l'explication que donne un scholiaste sur le *Khalaset-el-hisab* de Beha-Edden et c'est ce qu'on lit aussi dans une arithmétique en hébreu du savant israélite Élie Hamisrachi, imprimée à Constantinople en 1534 (*). Ainsi le mot chiffre, quoique ayant changé d'acception, vient de l'arabe *sifr*. En anglais, il a même conservé cette acception. Le zéro se nomme *cipher*.

Sahara en arabe signifie un champ, et *sahrasifr* un champ vide, un endroit vide; d'où, selon Nesselman, peut venir le mot zéro. Le zéro est l'âme de toute numération écrite. M. C.-I. Gerhardt, dans un savant appendice à son ouvrage : *Die Entdeckung der hohern analysis*, Découverte de l'analyse supérieure, 1855, admet l'origine indienne, par l'intermédiaire arabe, de notre numération chiffrée, opinion à laquelle nous adhérons complétement. L'opinion opposée n'est fondée que sur une explication contestable de passages obscurs, d'une authenticité douteuse. L'origine orientale s'accorde avec toutes les traditions historiques, claires, s'accorde avec le bon sens. L'origine occidentale ne s'appuie que sur des devinations, sur des déchiffrements de mots énigmatiques : vaste champ où l'esprit et l'érudition peuvent se donner carrière.

Zéro peut venir de *ziffer o, o* prononcé comme voyelle et par contraction zéro.

(*) Élie Misrachi (l'oriental) était chef de la synagogue de Constantinople en 1490; il a composé plusieurs ouvrages technologiques. Son *Arithmétique* a été traduite en latin par Schrekenfuss et imprimée à Bâle en 1546.

BIBLIOGRAPHIE.

Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota, etc., ou Correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du xvii^{e} siècle, relative à l'Analyse supérieure, réimprimée sur l'édition originale de 1712 avec l'indication des variantes de l'édition de 1722, complétée par une collection de pièces justificatives et de documents, et publiée par *J.-B. Biot*, membre de l'Institut, et *F. Lefort*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Paris, Mallet-Bachelier, gendre et successeur de Bachelier, imprimeur-libraire de l'École impériale Polytechnique, quai des Augustins, 55. In-4, xv-293 pages; 1856. Prix : 15 francs.

Nemo in causa propria sibi testis est.
(Newton, *Recensio libri*, p. 25.)

Une idée n'existe pour le public que lorsqu'elle est rendue publique. Car il est impossible de deviner ce que les savants écrivent dans leurs cabinets, ce qu'ils se communiquent entre eux dans l'intimité. La publicité seule constitue la priorité; une invention appartient à celui qui la fait connaître le premier. Vous auriez beau prouver victorieusement que vous avez eu la même idée il y a vingt ans, rien n'y fait. Il fallait publier. On ne doit de la reconnaissance qu'à celui qui ne cache pas ses pensées, qui n'en fait pas mystère. Lorsque, ayant trop tardé, on a été ainsi prévenu, par esprit de dépit, par sentiment de vengeance, on a recours à l'accusation banale de plagiat; à cet effet, des documents intimes sont invoqués comme pièces à l'appui: moyen bien précaire.

Comment établir que ces pièces n'ont pas été fabriquées pour la cause? qu'elles n'ont pas été altérées, mutilées? qu'on n'en a pas supprimé pouvant nuire à la cause? Comment *peser* les témoignages sous le rapport de la moralité? comment faire le départ des mauvaises passions, des mauvaises intentions? Aussi, dans l'impossibilité de se reconnaître au milieu de tant de difficultés, le grand public reste indifférent à des discussions qui n'intéressent que des vanités blessées, et s'en tient avec raison à l'inventeur qui s'est révélé le premier. Ainsi Leibnitz est le premier qui ait publié sans aucun déguisement une méthode pour calculer les quantités infinitésimales : il est donc l'inventeur. On l'a accusé d'avoir appris cette méthode de Newton, par conséquent de la lui avoir prise. Quoique, comme pièces de conviction, on ait divulgué une collection de documents intimes, sous le titre de *Commercium epistolicum, etc.*, le nom de Leibnitz ne reste pas moins irrévocablement attaché à la plus grande création qui ait jamais eu lieu dans le domaine des sciences mathématiques. D'ailleurs M. Lefort montre avec une logique irrésistible, sans phrases, que ces documents empreints des défauts que nous avons signalés ci-dessus, ne prouvent absolument rien contre Leibnitz et prouveraient malheureusement beaucoup contre Newton, si l'on ne prenait en considération l'influence d'un mauvais entourage qui a habilement exploité quelques expressions ambiguës pour jeter des excitants dans l'esprit d'un vieillard. Le génie le plus divin, le plus angélique, contient des éléments terrestres. C'est une triste vérité qui ressort de l'historique que nous allons essayer de donner de cette malheureuse discussion. Nous croyons utile de donner tout de suite les noms des personnages principaux et secondaires, avec l'année de la naissance, et classés d'après l'année de la mort.

	Naissance.	Mort.
Neper	1550	1617 (*)
Cavalieri	1598	1647 (**)
Fermat	1590	1665 (***)
*Gregory (Jacques)	1636	1675
*Barrow (Isaac)	1630	1676 (****)
*Oldenbourg	1626	1677
*Borelli (Alphonse)	1608	1679
Ricci	1619	1682 (*****)
*Collins	1624	1683
Brounker	1620	1684
*Sluze	1623	1685 (******)
Mercator	1660	1687
Mouton	1618	1694
Huyghens	1629	1695
*Wallis	1616	1703
L'Hôpital	1661	1704
Hudde	16...	1704 (*******)
Bernoulli (Jacques)	1654	1705
*Gregory (David)	1661	1708
*Tschirnhauss	1651	1708
*Leibnitz	1646	1716 (14 nov.)
Rémond de Montmort	1678	1719
*Keill	1671	1721
Varignon	1654	1722
*Newton	1642	1727 (20 mars)
Brook Taylor	1685	1731
Halley	1656	1741

(*) *Logarit. canonis,* 1614.
(**) *Geometriæ indiv.*, 1635.
(***) Sa *Méthode* parut en 1644. *Cursus meth.*, de Herigone.
(****) *Lectiones,* 1669.
(*****) *Geom. exercitatio,* 1666.
(******) *Mesolabum*, 1668.
(*******) Sa *Méthode* est de 1655.

	Naissance.	Mort.
Bernoulli (Jean)......	1667	1748
Conti (l'abbé)......	1677	1748
* Sloane............	1660	1752

Les astérisques désignent ceux dont les Lettres composent le *Commercium*.

HISTORIQUE.

Nous allons d'abord signaler les pièces publiques destinées dès le principe à être publiées, et nous signalerons ensuite quelques pièces intimes qui n'avaient pas cette destination.

Pièces publiques.

1684, octobre. Leibnitz publie dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig les principes du calcul différentiel sous le titre :

Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.

« Nouvelle méthode pour les maxima et les minima et aussi pour les tangentes, qui ne s'embarrasse ni des quantités fractionnaires, ni des quantités irrationnelles, et nouveau genre de calcul pour ces objets. »

C'est la pièce publique, la première en date. Selon l'esprit du temps qui laissait toujours quelque chose de mystérieux à deviner, l'exposition est très-condensée. L'auteur ne donne pas la succession des idées qui ont amené ce nouveau genre de calcul, ce qui rend la compréhension assez difficile. Il montre la manière d'appliquer le calcul différentiel aux problèmes de géométrie, mais il ne mentionne nullement le calcul intégral; seulement à la fin du Mémoire, il y fait allusion en faisant entendre qu'il possède encore d'autres moyens de solution.

Et hæc quidem initia sunt tantum geometriæ cujus-

dam multo sublimioris, ad difficillima et pulcherrima quæque etiam mistæ Matheseos problemata pertingentis, quæ sine calculo nostro differentiali aut simili non temere quisquam pari facilitate tractabit.

« Et ce sont là seulement les commencements d'une géométrie beaucoup plus sublime, s'étendant même aux problèmes les plus difficiles et les plus beaux des mathématiques mixtes, et que d'aventure personne ne traitera avec la même facilité sans notre calcul différentiel ou un calcul semblable. »

Cette réticence a même donné lieu à une discussion de priorité avec Jean Bernoulli. Celui-ci nommait calcul intégral l'inverse du calcul différentiel et se servait de la lettre initiale I, tandis que Leibnitz le nommait calcul sommatoire, et se servait du signe $\int$. Ils firent entre eux un compromis qui fut généralement adopté ; on conserva le nom donné par Bernoulli et le signe établi par Leibnitz (*).

1687, mai. Première publication des *Philosophiæ naturalis Principia mathematica, authore* Is. Newton, *Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos professore Lucasiano et Societatis Regalis sodali. Londini, typis Josephi Streater, anno* 1687.

La préface est sans date. Mais, dans la seconde édition de 1773, on lit : *Dabam Cantabrigiæ è collegio S. Trinitatis, Maii* 8, 1687. Dans le second livre (section II), à la page 250, on trouve le lemme II, où, pour la première fois, Newton explique ce qu'il entend par *moments* ou *fluxions*. Il considère des quantités croissant ou décroissant par un mouvement ou un flux perpétuel ; les

---

(*) J. Bernoulli, dans la préface de son Mémoire sur le mouvement des muscles, reconnaît les droits de Leibnitz à l'invention du calcul intégral. (*Opera omn.*, t. Ier, p. 96.)

accroissements ou décroissements instantanés sont des moments ou des fluxions. Il démontre que le moment de A étant a, b celui de B, le moment de AB est $Aa + Bb$; le moment de $A^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n} A^{\frac{m}{n}-1} a$, etc. Il n'y a pas de notations. Ce lemme est suivi de ce célèbre scolie :

In literis quæ mihi cum geometra peritissimo G.-G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes et similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, et literis transpositis hanc sententiam involventibus [data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa], eandem celarem : rescripsit vir clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum et notarum formulis. Utriusque fundamentum continetur in hoc lemmate.

« Dans une correspondance que j'ai entretenue il y a une dizaine d'années avec le très-habile géomètre G.-G. Leibnitz, lui ayant annoncé que j'étais en possession d'une méthode pour déterminer les maxima et les minima, pour mener des tangentes et faire autres choses semblables, qui s'appliquent aux quantités irrationnelles aussi bien qu'aux rationnelles et ayant celé l'idée de cette méthode sous des *lettres transposées* renfermant ce sens [Étant donnée une équation renfermant un nombre quelconque de quantités fluentes, en trouver les fluxions, et *vice versâ*], l'homme célèbre me répondit qu'il était tombé sur une méthode de même genre, et il me communiqua sa méthode qui diffère à peine de la mienne, si ce n'est dans les termes et dans les notations. Le fondement de l'une et de l'autre méthode est contenu dans ce lemme. »

Il est de toute évidence que Newton reçonnaît ici publiquement les droits de Leibnitz.

Newton démontre tout par une analyse discursive, sans algorithme, ce qui en rend la lecture extrêmement pénible et fatigante. Euler lui-même dit n'avoir pu souvent comprendre les propositions des *Principes* qu'en les *écrivant* algébriquement. Aussi cet ouvrage n'a pu avoir qu'un très-petit nombre de lecteurs, même en Angleterre. Il est à remarquer que par délibération du 19 mai 1686 la Société Royale ordonne l'impression immédiate des *Principes*, en beaux caractères, en charge Halley, mais à condition que Halley *en fera les frais*. Il y a là un enthousiasme peu dispendieux pour la Société Royale (Edleston, *Corresp.*, p. xxx).

La notation si commode de Leibnitz servit à propager sa méthode différentielle sur tout le continent et même en Angleterre. Dès 1685, John Graig emploie la méthode différentielle qu'il rapporte toujours à Leibnitz dans son ouvrage : *Methodus figurarum curvilinearum quadraturas determinandi*, London, 1685, et en 1696 on voit paraître un Traité complet de calcul différentiel sous le titre de *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, par le marquis de l'Hospital; ouvrage capital, encore précieux aujourd'hui. On n'y trouve rien sur le calcul intégral. Ce n'est qu'en 1693 que Newton a publié pour la première fois sa *notation* des fluxions, en l'insérant avec les règles du calcul dans le tome II des *Opera mathematica* de Wallis (*).

1704. Newton publia ces mêmes règles sous forme d'introduction à son *Tractatus de quadratura curvarum*, opuscule qu'il joignit avec un autre : *Enumeratio linearum tertii ordinis*, dans la première édition de son *Optique*, 1704.

(*) Il emploie le *point supérieur* pour les *fluxions* et le *carré* pour les quantités fluentes (intégrales).

Dans ce *Tractatus*, il donne les différentielles secondes et troisièmes avec la même erreur qu'il avait commise dix-huit années auparavant dans la première édition des *Principes* (lib. II, prop. X, corol. II).

Il développe $\overline{z + o}^{n}$ et trouve

$$z^n + n o z^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} oo z^{n-2} + \frac{n^3 - 3n^2 + 2}{6} ooo z^{n-3} + \ldots$$

et il dit que la différence première de z^n est $n o z^{n-1}$, ce qui est juste; ensuite que la différence seconde est, les zéros indiquant des infiniment petits,

$$\frac{n^2 - n}{2} oo z^{n-2};$$

la différence troïsième

$$\frac{n^3 - 3n^2 + 2}{6} ooo z^{n-3} \ldots,$$

ce qui est faux.

Jean Bernoulli, appliquant ces formules au problème résolu par Newton dans l'endroit des *Principes* cité ci-dessus, trouva que sa solution était fausse et toutefois les raisonnements justes, et il vit que l'erreur gisait dans le calcul où l'on avait pris des différentielles *divisées* au lieu des différentielles (Jean Bernoulli, *Opera omnia*, t. I, p. 535; 1713).

1699. Le commencement de la querelle date de cette année. L'auteur est Nicolas Fatio, du château de Duiller, près de Genève, assez habile géomètre et esprit orgueilleux, très-extravagant (ce qui n'est nullement incompatible), tellement qu'il finit par s'attirer un châtiment judiciaire infamant. Huyghens, dont il était le correspondant, lui proposait souvent des problèmes, et, lorsque Fatio déclarait ne pouvoir les résoudre, Huyghens s'adressait à Leibnitz qui les résolvait facilement à l'aide de son calcul, et Huyghens en instruisait Fatio, dont l'amour-propre, âme de l'âme des savants, a dû être singulièrement froissé. Etabli à Londres, il eut des relations avec

Newton. En 1699, il publia sa dissertation *Lineæ brevissimi descensus investigatio géometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quo minima fiat resistentia.* Lond., in-4.

Parlant du nouveau calcul, il s'exprime ainsi, p. 18 :

Newtonum primum, ac pluribus annis vetustissimum, hujus calculi inventorem, ipsa rerum evidentia coactus agnosco : a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius, secundus ejus inventor, malo eorum, quam meum, sit judicium, quibus visæ fuerint Newtoni Literæ aliique ejusdem manuscripti Codices.

« Forcé par l'évidence même des choses, je reconnais Newton comme le premier inventeur de ce calcul, et le plus ancien de beaucoup d'années. Leibnitz, le second inventeur, a-t-il emprunté quelque chose de Newton? Au lieu d'énoncer mon propre jugement, je préfère m'en rapporter à ceux qui ont vu les lettres et les autres registres manuscrits de Newton. »

Cette malicieuse insinuation, transparente accusation de plagiat, fut repoussée par Leibnitz avec beaucoup de modération dans les *Actes de Leipsig*, mai 1700. Nous traduisons :

« Lorsque j'ai publié, en 1684, les éléments de mon calcul, je ne connaissais rien de ses inventions (*) en ce genre, si ce n'est qu'il m'avait écrit qu'il pouvait mener des tangentes sans faire disparaître les irrationnelles; depuis, Huyghens m'a annoncé qu'il pouvait la même chose, bien qu'il ignorât ce calcul; mais ayant vu les *Principes*, j'ai assez compris que Newton avait acquis des propositions de beaucoup supérieures. Cependant, je n'ai appris qu'il se servait d'un calcul semblable au calcul différentiel que depuis la publication des tomes II et III des œu-

(*) De Newton.

vres du grand géomètre Jean Wallis. Huyghens, voulant complaire à ma curiosité, m'envoya tout de suite copie de l'endroit où il s'agit de Newton. »

D'ailleurs, déjà en 1686, Leibnitz avait parfaitement et avec une grande sincerité, signalé ce qu'il devait à ses devanciers.

1686. Voici comment il s'exprime dans les *Actes de Leipsig*, juin 1686:

Quod superest, etc.

« Afin que je ne paraisse pas vouloir trop m'attribuer ou trop enlever aux autres, il me reste à dire, en peu de mots, ce que, selon moi, on doit, en ce genre de géométrie, principalement aux grands mathématiciens de ce siècle. Galilée et Cavalieri commencèrent les premiers à débrouiller les préceptes très-obscurs de Conon et d'Archimède. Mais la géométrie des indivisibles de Cavalieri ne fut que l'enfance de la renaissance de la science. Trois hommes célèbres amenèrent de plus puissants secours : *Fermat*, par sa méthode de maximis et minimis; *Descartes*, en montrant comment on exprime par des équations les rapports des lignes de la géométrie ordinaire (car il exclut les lignes transcendantes); *Grégoire de Saint-Vincent*, par plusieurs belles inventions. A quoi j'ajouterai la belle règle de Guldin relative au mouvement du centre de gravité. Mais ceux-ci restèrent entre certaines limites, que franchirent, s'étant ouvert une nouvelle voie, les fameux géomètres Huyghens et Wallis. Car il est assez probable que ce sont les travaux de Huyghens qui ont fourni à Heuratius (*), et les travaux

(*) On trouve, dans la *Géométrie* de Descartes avec les Commentaires de Schooten (3e edition, Amst., 1683) une Lettre de Henri Van Heuraet : *De Transmutatione linearum curvarum in lineas rectas.* La Lettre est du 13 janvier 1659. Montucla donne cette méthode de rectification (*Hist.*, t. II, p. 151). (PROUHET.)

de Wallis à Neil et à Wreen, l'occasion de faire leurs plus belles inventions, ayant été les premiers à montrer des droites égales en longueur à des lignes courbes, ce qui pourtant n'ôte rien à l'éloge que méritent leurs inventions. Ils furent suivis de Jacques Gregory, Écossais, et de Isaac Barrow, Anglais, qui enrichirent merveilleusement la science de plusieurs beaux théorèmes. Pendant ce temps-là, Nicolas Mercator, de Holstein, mathématicien très-distingué, exprima, le premier que je sache, certaine quadrature par une série infinie. Mais Isaac Newton, géomètre d'un génie extrêmement profond, parvint aux mêmes résultats, non-seulement par ses propres forces, mais il le découvrit par certain raisonnement général. S'il publiait ses méditations, qu'il tient en réserve, nul doute qu'il nous ouvrirait de nouvelles routes qui amèneraient de grands progrès et profits pour la science. Etant encore apprenti dans ces études, il m'arriva que la vue d'une certaine démonstration de l'aire de la sphère m'éclaira subitement d'une vive lumière. Car je voyais que généralement la figure que l'on obtient en menant des perpendiculaires à la courbe (les rayons dans le cercle) et les prolongeant jusqu'à l'axe, est proportionnelle à la surface du solide engendrée par cette figure tournant autour de l'axe (*). Étant extrêmement charmé de ce théorème (je ne savais que telle chose était déja venue à la connaissance d'autres), j'imaginai tout de suite, dans toute courbe, un triangle que j'appelai *caractéristique,* dont les côtés étaient indivisibles (soit, à parler plus exactement, des infiniment petits) ou bien des quantités différentielles; et je produisis tout de suite, sans aucune peine, une foule de théorèmes que j'ai rencontrés depuis chez les Grégoire (**)

(*) C'est celle de Heuraet, comme on peut voir dans Montucla.

(**) Grégoire de Saint-Vincent et Jacques.

et chez Barrow, mais je ne faisais alors point usage du calcul algébrique; lorsque je l'ai admis, je parvins bientôt à découvrir ma quadrature arithmétique et bien d'autres choses. Toutefois, je ne sais pourquoi le calcul algébrique ne me satisfaisait pas dans cette affaire, et pour beaucoup de choses que je voulais obtenir par l'analyse, j'étais forcé d'avoir recours à des détours par des figures, lorsque enfin je découvris un supplément à l'algèbre pour les transcendantes, savoir mon calcul des infiniment petits, que j'appelle différentiel ou sommatoire ou *tétragonistique*, et plus convenablement, si je ne me trompe, analyse des *indivisibles* et des infinis; ce calcul une fois découvert, tout ce que j'avais tant admiré auparavant dans ce genre, ne me parut plus qu'un jeu et un amusement. »

On voit que Leibnitz répond ici d'avance aux perfides insinuations de Fatio.

Tout serait probablement resté là, sans une expression et une citation assez ambiguës dont se servirent les rédacteurs des *Actes de Leipsig*, en rendant compte de l'ouvrage de Newton *De Quadratura* mentionné ci-dessus. Ils disent, janvier 1705 :

Pro differentiis igitur Leibnitianis D. Newtonus adhibet, *semperque* adhibuit fluxiones; *iisque tum in suis Principiis naturæ mathematicis, tum in aliis postea editis eleganter est usus, quemadmodum et Honoratus Fabrius in sua Synopsi geometrica motuum progressus Cavallerianæ methodo substituit.*

« Ainsi, au lieu des différentielles Leibnitziennes, Newton applique et a toujours appliqué les *fluxions*. Il s'en est servi élégamment dans ses *Principes mathématiques de la nature* et ensuite dans plusieurs autres écrits; de même que Fabrius (Honoratus) dans sa *Synopsis geometrica* a substitué les mouvements progressifs à la méthode de Cavalieri. »

On sait maintenant que cet article est de Leibnitz, car son nom se trouve au bas dans une copie conservée des *Actes* (Guhrauer, *Biog.* v. Leibnitz, p. 311; Breslau, 1846). C'est un grand tort.

On pouvait croire, en effet, qu'à l'instar de Fabrius, substituant sa méthode à celle de Cavalieri, Newton avait de même substitué les fluxions aux différentielles. Ce n'est certainement pas là le vrai sens, puisque, dans ce même journal, Leibnitz avait déclaré en 1700 (*voir* ci-dessus) que Newton possédait une méthode analogue à la sienne. Ce qui montre bien qu'on n'admettait pas non plus un tel sens, c'est qu'on est resté trois années sans y faire la moindre attention. Ce n'est qu'en 1708, dans une Lettre sur les forces centripètes adressée à Halley et insérée dans les *Transactions philosophiques* (1708, septembre et octobre, page 185), que Jean Keill s'énonce ainsi :

Hæc omnia sequuntur ex celebratissima nunc dierum fluxionum arithmetica, quam sine omni dubio primus invenit D. Newtonus, ut cuilibet ejus epistolas a Wallisio editas legenti facile constabit; eadem tamen arithmetica postea, mutatis nomine et notationis modo a D. Leibnitio in Actis Eruditorum edita est.

« Tout cela découle de l'arithmétique des fluxions, la plus célèbre de notre temps, et dont Newton fut sans aucun doute le premier inventeur; de quoi restera facilement convaincu tout lecteur des Lettres de Newton, publiées par Wallis; et pourtant, ayant changé seulement le nom et la notation, Leibnitz publia depuis la même arithmétique dans le *Actes de Leipsig.* »

1711, 4 mars. Hans Sloane, secrétaire de la Société Royale, ayant adressé ce volume à Leibnitz en 1710, année de la publication, il ne lui parvint qu'en 1711, étant alors à Berlin Le 4 mars 1711, Leibnitz accuse réception: il est surpris de ce qu'on ait laissé insérer l'assertion de Keill, d'autant que semblable accusation soulevée par Fatio de Duiller et repoussée par Leibnitz, avait été désapprouvée par Sloane dans des Lettres qu'il lui a écrites, et, à ce qu'il a appris, désapprouvée par Newton lui-même. Il pense d'ailleurs que Keill a péché par étourderie, et ne le considère pas comme un calomniateur; mais, comme l'assertion est calomnieuse, pour empêcher qu'elle ne se renouvelle, il désire que la Société Royale engage Keill à se rétracter (*Cogor remedium ab inclyta vestra Societate Regia petere*).

Le 22 mars 1711, cette Lettre fut lue en partie devant la Société Royale. Le 24 mai 1711, Keill lut sa réponse, et ordre fut donné de la communiquer à Leibnitz et de l'insérer dans les *Transactions* dès qu'on aurait la réponse de Leibnitz. Keill y dit qu'il ne prétend nullement que Leibnitz ait eu connaissance du nom que Newton a donné à sa méthode, ni de sa notation; mais que, d'après deux Lettres de Newton à Oldenbourg, communiquées à Leibnitz, celui-ci a pu facilement y puiser sa méthode, et que n'ayant pu obtenir par le raisonnement les formules et les notations de Newton, il y a substitué les siennes. D'ailleurs, lui Keill ne fait que repousser les allégations hostiles à Newton des rédacteurs des *Actes de Leipsig;* que ce n'est pas du tout une calomnie de revendiquer pour Newton ce qui lui appartient, savoir d'être le premier inventeur, et qu'il n'y a pas lieu à rétractation.

1711, 29 décembre. Cette Lettre communiquée à Leibnitz, celui-ci répondit de Hanovre le 29 décembre : « Qu'aucune personne équitable et sensée ne pouvait prétendre qu'à son âge (il avait 65 ans) et après tant de travaux il aille se commettre et accepter pour juge un homme savant, mais novice, n'ayant pas mandat de juge dans cette affaire; que Keill invoque vainement les *Actes;*

qu'on y a toujours rendu justice à chacun ; que lui, Leibnitz, et ses amis avaient toujours admis que l'illustre auteur des fluxions était parvenu de lui-même à des principes semblables à ceux des différentielles. » Il termine par ces paroles :

Itaque vestræ acquitati committo, annon coercendæ sint vanæ et injustæ vociferationes quas ipsi Newtono viro insigni et gestorum optime conscio, improbari arbitror; ejusque sententiæ suæ libenter daturum indicia mihi persuadeo.

« Je laisse à décider à votre équité s'il n'est pas convenable de réprimer de vaines et injustes clabauderies, qui, je pense, sont désapprouvées par Newton lui-même, homme illustre, qui a conscience parfaite de tout ce qui s'est fait, et je suis persuadé qu'il donnera volontiers sa propre opinion. »

Le 31 janvier 1712, cette Lettre fut lue à la Société Royale et délivrée à Newton. Newton se garda bien de répondre à cet appel, et cela probablement pour plusieurs raisons : 1° il savait mieux que personne qu'il n'avait rien communiqué à Leibnitz ; 2° il était convaincu que la notation de Leibnitz valait mieux que la sienne; 3° il voyait que sa méthode, comprise par un très-petit nombre de géomètres, restait stationnaire et confinée dans un coin, tandis que celle de Leibnitz était en progrès et se propageait dans toute l'Europe ; 4° il était blessé, avec quelque raison, par les expressions malencontreuses, équivoques, des *Actes de Leipsig*. Dans cet état d'irritation, il aima mieux déférer toute l'affaire au jugement de la Société Royale dont il était président, où siégeaient tous ses amis, tous ses partisans, tous ses admirateurs.

Comme Leibnitz avait appelé de Keill, homme novice, à la Société Royale, un comité de six membres fut établi, le 17 mars 1712, pour examiner les Lettres et les Mémoires relatifs à cette discussion, et en faire un Rapport à la Société. Ces commissaires étaient : Arbuthnot, Hill, Halley, Jones, Machin, Burnet; on y joignit Francis Robert le 20 mars, Bonet, l'envoyé de Prusse, le 27 mars, et de Moivre, Aston, Brook Taylor le 17 avril. Le Rapport fut lu le 24 avril. Le jugement, rédigé en anglais et en latin, renferme quatre considérants. Le dernier est « que la *méthode différentielle* est une et la » même que la *méthode des fluxions,* excepté le nom » et le mode de notation, M. Leibnitz appelant *diffé-* » *rences* ce que Newton appelle *moments* ou *fluxions,* » et faisant avec la lettre *d* un signe non employé par » Newton, et, à cause de cela, nous posons que la ques- » tion n'est pas de savoir qui a inventé telle ou telle » méthode, mais qui a été le premier inventeur; et nous » pensons que ceux qui ont réputé Leibnitz être le pre- » mier inventeur, savent peu de chose ou rien de sa Cor- » respondance avec Collins et Oldenbourg longtemps au- » paravant, ni que M. Newton possédait cette méthode » quinze années avant que Leibnitz l'ait publiée dans les » *Actes de Leipsig*. Par ces raisons, nous reconnaissons » M. Newton comme le premier inventeur, et sommes » d'opinion que M. Keill, en avançant la même opinion, » n'a pas été injuste envers M. Leibnitz. Nous soumettons » au jugement de la Société s'il convient de publier les » extraits des Lettres et des Mémoires que nous lui pré- » sentons, ainsi que ce qui est relatif à cet objet dans le » III^e volume du docteur Wallis. »

Ce Rapport, bâclé au bout d'un mois, fut adopté et le tout imprimé sous ce titre :

Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de Analysi promota, jussu Societatis Regiæ in lucem editum.

L'ouvrage parut sous format in-4 en 1713 et fut imprimé par les soins de Halley à un très-petit nombre d'exemplaires distribués aux membres de la Commission, et envoyés à quelques universités et à quelques savants distingués; de sorte que cette édition est excessivement rare. Les frais d'impression, payés à Halley, se montèrent à $22^{l}\ 2^{sh}\ 6^{d}$ (557 francs).

La seconde édition, format in-8, est de 1722 avec ce titre :

Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota jussu S. R. in lucem editum; una cum ejusdem recensione præmissa, et judicio primarii, ut ferebatur, mathematici subjuncto iterum impressum. Londini ex officina J. Tonson et J. Watts. MDCCXXII.

A plusieurs exemplaires de cette édition on a mis ce nouveau titre, qui n'est qu'un carton :

Commercium epistolicum de varia re mathematica inter celeberrimos præsentis seculi mathematicos, viz Isaacum Newtonum equitem auratum,

Dnum *Isaacum Barrow,*	Dnum *J. Collinium,*
Dnum *Jacobum Gregorium,*	Dnum *Gulielmum Leibnitsium,*
Dnum *Johannem Wallisium,*	Dnum *Henricum Oldenbourgum,*
Dnum *J. Keillium,*	Dnum *Franciscum Slusium,*

et alios. Jussu, etc. (comme ci-dessus).

Londini impensis J. Tonson et J. Watts. Prostant venales apud J. Mac Euen ad insigne Georgii Buchanani et regione templi Sancti Clementis in vico vulgo dicto the Strand, 1725.

L'iniquité de ce jugement est flagrante. On peut appliquer à ce tribunal ce qu'on a dit dans un procès tristement célèbre : « Je cherche des juges et ne trouve que des accusateurs. » Il y a neuf Anglais, et, par dérision, on y a adjoint vers la fin deux étrangers. Selon l'observation judicieuse de M. Lefort, Moivre, nommé le 17 et se prononçant le 24, a dû former son jugement bien vite. On n'y rencontre que quatre géomètres. Les autres sont des amis de Newton; c'est le seul mérite qu'on leur connaisse; ils ont jugé sans entendre la défense de l'accusé. D'ailleurs, c'est le contraire du dernier considérant qui est vrai. La question fondamentale est de savoir qui est l'auteur de telle ou telle méthode. La véritable invention existe dans la hiérarchie des infiniment petits et dans les signes *d* et *∫* qui s'y rattachent: hiérarchie que la méthode fluxionnelle ne pouvait pas donner et sur laquelle Newton avait des idées inexactes qui l'ont amené à des résultats erronés (*). On peut remarquer ici deux singularités. D'abord l'original du jugement, écrit entièrement de la main de Halley, ne porte *aucune signature;* ensuite, en 1713, en même temps que le jugement, parut aussi une 2e édition des *Principes*, sous les yeux de Newton et soignée par R. Cotes. Non-seulement Newton conserve le scolie rapporté ci-dessus, où il reconnaît patemment les droits de Leibnitz, mais il améliore cette reconnaissance par une addition très-importante; car, parmi les différences qu'il signale entre sa méthode et celle de Leibnitz, il ajoute, après *notarum formulis,* ces mots : *et idea generationis quantitatum,* « et par l'idée de la génération des quantités » ; car c'est bien cette idée qui établit entre les deux méthodes une différence profonde; c'est probablement Cotes, éminent géomètre, qui a indiqué cette addition *fondamentale.* Le scolie n'a été supprimé que dans l'édition de 1722. Mais alors Newton octogénaire avait pour éditeur Pemberton. Il y avait six ans que Cotes était mort, la même année que Leibnitz. Il paraît

(*) Lagrange disculpe Newton (*Fonctions analytiques,* p. 246-250; Paris, an V). M. A. Genocchi croit que Lagrange a raison : c'est à examiner.

qu'on n'a pas envoyé d'exemplaire du *Commercium* à Leibnitz; il ne l'avait pas encore lu le 14 avril 1714. Il voulait publier aussi un *Commercium epistolicum* où il aurait mis les lettres *omises* et complété les lettres *tronquées*. Les voyages continuels, les occupations multipliées et la mort arrivée le 14 novembre 1716, ne permirent pas de réaliser ce projet qui vient d'être exécuté. Car il s'est rencontré un homme d'un savoir profond, d'un excellent jugement, animé d'un zèle infatigable (*indefessus*), investigateur toujours consciencieux, qui a établi d'une manière irréfragable, sur pièces authentiques, que Leibnitz est le premier, le seul inventeur de son calcul, et que, pour son algorithme, il ne doit rien à personne. Cet homme, c'est M. Lefort. Il établit avec une rigueur apodictique qu'il règne dans presque toutes les pièces réunies dans le *Commercium* anglais une foi qui est bien loin d'être bonne, et, malheureusement, c'est aussi ce que l'on remarque dans le célèbre résumé (*Recensio*) qui est en tête de la seconde édition du *Commercium*, résumé que Newton attribue à Keill et qu'on sait maintenant être l'œuvre de Newton même. On a retrouvé l'original de la main de Newton et portant sa signature.

Tantæne animis cœlestibus iræ!

Cela ne doit pas diminuer le culte que tout être pensant doit à la sublimité du génie de Newton, supérieur, sous quelques rapports, à celui de Leibnitz; seulement, il faut se rappeler que si tous les peuples placent les anges au ciel, c'est qu'ils n'en ont pas rencontré sur la terre.

Dans une Note biographique sur Leibnitz, nous insérerons les traductions de quelques lettres, pièces importantes de ce procès.

Le *Commercium* contient quatre-vingt-cinq extraits de lettres trouvées la plupart dans les papiers de Collins, secrétaire de la Société Royale, mort en 1683, par conséquent trente ans avant la publication, et, comme on peut vérifier sur la page 115, les auteurs de ces lettres avaient aussi disparu de la scène du monde. Disons tout de suite que ces extraits sont arrangés avec un tel art, choisis, mutilés, commentés et annotés avec un tel discernement, et le *Recensio* est écrit avec une logique si serrée, qu'on reconnaît partout la présence de Newton. Ceci explique pourquoi les juges n'*ont pas signé* une œuvre qu'en toute conscience ils ne pouvaient regarder comme la leur, et cependant, dans le *Recensio*, Newton proclame cette belle maxime : *Nemo in causa propria sibi est testis*, ce qui rappelle cet aphorisme d'anthropologie : *Aliud est scribere, aliud est agere*.

M. Lefort termine cette publication par un sommaire aussi curieux qu'instructif des principaux travaux mathématiques qui, au XVIIe siècle, ont préparé l'invention de l'analyse infinitésimale; les auteurs sont Cavalieri, Descartes, Fermat, Hudde, Ricci, Barrow, Sluze.

La science doit cette précieuse acquisition à l'illustre et vénérable polymathe, ornement de trois Académies, qui a aidé de ses conseils son savant petit-fils (*). C'est devant de tels travaux que doivent s'ouvrir les portes de l'Académie des Inscriptions. C'est surtout l'érudition qui s'attache à l'histoire de la *pensée* qui mérite d'être encouragée; là est la dignité humaine. Malheureusement, cette érudition se porte principalement sur l'histoire de nos actions : là sont nos misères.

M. Mallet-Bachelier s'est montré digne successeur de son beau-père, en prêtant ses presses à une production qui devra prendre place en toute bibliothèque sérieuse.

Note. Dans le *Commercium*, on lit (p. 101, édition

(*) M. Lefort, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a épousé une petite-fille de M. Biot.

de Paris) que David Gregory est le frère de Jacques; les biographes disent qu'il est le *neveu*. A-t-il existé deux David (*)?

Programme détaillé d'un Cours d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie analytique, comprenant les connaissances exigées pour l'admission aux Ecoles du Gouvernement et suivi de Notes et des Énoncés d'un grand nombre de problèmes; par MM. *Gerono* et *Roguet*. Quatrième édition, entièrement refondue. Paris, Mallet-Bachelier, in-8 de 216 p., 1856. Prix : 3f 50c.

Ce n'est pas ici, comme on pourrait le craindre, un squelette décharné, sans muscles, sans nerfs; c'est, au contraire, un corps bien organisé où la vie coule partout: il y a même un certain charme à monter graduellement, sans lacunes, sans brusques transitions, depuis les premiers linéaments de la numération jusqu'aux régions qui confinent à la géométrie et à l'algèbre supérieures. Cet ouvrage, indispensable pour les élèves studieux, utile aux professeurs méthodiques, agréable à tout géomètre, ajoute à la haute réputation que les savants auteurs ont acquise depuis long temps dans l'enseignement.

Les définitions sont placées aux endroits convenables. C'est ainsi que la définition des mathématiques est placée à la page 12, qualité logique bien rare.

Le *Chapitre IX* (p. 28) traite des opérations abrégées, approximations numériques, erreurs relatives. C'est aujourd'hui la *crux* de l'arithmétique, des élèves et des professeurs. On pourrait faire un gros volume de ce qu'on a écrit, et l'on écrira encore, sans dissiper complétement l'obscurité, sans diminuer entièrement les

---

(*) Page 116, *Nec irrationales quantitates moratur, etc.* (N'est arrêtee ni par les quantites irrationnelles, etc) (A. Genocchi) difficultés. C'est que l'objet fait partie de la théorie de la convergence sériaire et du calcul des probabilités, objets qui exigent l'algèbre *écrite*, tandis que dans l'arithmétique on est tenu à l'algèbre *parlée*, la plus mauvaise, la plus difficultueuse, la plus traînante des algèbres. Pourquoi prendre des *coucous* quand on a des locomotives? Aussi je crois que tout ce manége approximatif, utile aux calculateurs de profession, est une surcharge inutile aux élèves. Je persiste à croire que le but moral de l'éducation des lycées doit être de faire des logiciens habitués à la rigueur géométrique, et cela suffit. Qu'on fasse des Manuels à l'usage des calculateurs du Cadastre, du Bureau des Longitudes, de l'Observatoire, à la bonne heure, rien de mieux, pourvu toutefois qu'on en dispense nos élèves (*). Malheureusement *in calculatorum ditione sumus*, et il ne faut pas oublier que *vanter* et *vendre* viennent du même verbe latin *venditare*, ce qui explique bien des choses.

Dans le Complément d'Arithmétique (p. 31), on parle du plus grand commun diviseur des fractions, etc.; je ne comprends plus ce qu'on veut dire par là. Je me rappelle bien avoir lu quelque chose de semblable dans je ne sais quelle Arithmétique et l'avoir trouvé complétement inutile.

A la page 35, à l'occasion des quantités négatives, on parle de *conventions*. Ce sont des hérésies qui, admises, ruineraient la certitude de l'analyse algébrique. Les signes + et — sont des *qualités* et non des conventions; c'est ce qu'a dit M. Cauchy : la vérité ne perd rien à s'appuyer sur une telle autorité (*voir* p. 172).

Chapitre VIII (p. 58). Séries dérivées. Pourquoi ne

(*) Les Tables de logarithmes rendent superflues les méthodes d'approximation numérique mille fois sur une.

pas donner aux choses leurs véritables noms et appeler calcul différentiel et *noter* comme tel ce qui est calcul différentiel? Quand cette superfétation, souverainement absurde, du calcul des dérivées disparaîtra-t-elle? quand le vœu émis par d'Alembert, il y a cent ans, s'accomplira-t-il dans l'enseignement? Lorsque le bon sens y régnera. Ainsi bientôt.

Trois chapitres (p. 83, 90, 91) renferment les deux trigonométries. Il est singulier, lorsqu'on insiste tant sur l'appréciation des *erreurs,* qu'on néglige complétement les différentielles des formules trigonométriques, dont l'utilité est vraiment pratique, bien plus que de savoir calculer à un billionième près $\pi^{\log 3}$ ou $(\log 3)^{\pi}$.

La géométrie analytique ne renferme rien sur le rapport anharmonique, sur les transversales, sur les faisceaux, etc., rien qui puisse préparer à la géométrie supérieure professée en Sorbonne. A la page 113, on cite *timidement* pôle et polaire. On comprend parfaitement qu'il serait injuste de reprocher aux auteurs l'existence de cette honteuse et calamiteuse omission; elle est imposée de haut.

Six Notes précieuses terminent cette remarquable production.

Note I (p. 141). Calcul numérique de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

lorsque a est très-petit, une des racines devient très-grande et l'autre s'approche de $-\frac{c}{b}$; c'est cette seconde racine qu'on évalue. De semblables évaluations pour les équations du troisième et quatrième degré ne seraient pas faciles.

Note II (p. 146). Sur une question d'intérêt composé:

Un capital de 10,000 francs est placé à intérêts com-posés et devient 157,917^{f},60 au bout de 10 ans 4 mois $\frac{1}{2}$, on demande le taux?

Réponse : 4^{f},50, à un centime près.

Note III (p. 148). Valeurs de la fonction $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$; discussion intéressante pour la construction de l'hyperbole cubique. Nous ferons remarquer que dans l'*Encyclopédie mathématique,* en voie de publication, on lit qu'*un nombre infini divisé par un nombre infini donne un quotient fini:* énoncé très-souvent faux. Du reste, si l'auteur, prenant Wronsky pour guide, s'est proposé de verser des flots d'encre sur la plus limpide des sciences, il a parfaitement réussi.

Note IV (p. 152). Plan tangent; démonstration que les tangentes en nombre infini qu'on peut mener par un point d'une surface à cette surface, sont dans un même plan.

Note V (p. 153). Conditions pour qu'une équation du second degré représente un cône droit; axes rectangulaires.

Note VI. Théorie des polynômes homogènes du second degré.

Ab ungue leo cognoscitur.

Cette Note contient cinq parties.

I^{re} Partie. Des déterminants (voir *Nouvelles Annales*, t. X, p. 124; t. XI, p. 307; t. XIII, p. 71).

II^{e}, III^{e} et *IV^{e} Parties*. De l'invariant des polynômes homogènes du second degré et du polynôme adjacent; applications à la géométrie analytique; sur la réduction des polynômes homogènes du second degré, à coefficients réels, à des sommes des carrés.

L'invariant est ce que nous avons désigné par L dans nos relations d'identité. C'est une certaine fonction des six coefficients de l'expression générale d'une fonction homogène quadratique à trois variables. Les dérivées de cette fonction par rapport à chacun de ces coefficients donnent six fonctions dérivées qui, avec la fonction principale, renferment toutes les propriétés des coniques. Il existe de même un *invariant* pour les fonctions quadratiques à quatre variables. C'est une certaine fonction homogène des dix coefficients de l'expression générale d'une telle fonction. Les dérivées de cet invariant par rapport à chaque coefficient donnent dix fonctions qui, avec la fonction principale, suffisent pour trouver les propriétés des surfaces du second ordre. Dans cette Note VI on prend pour invariant ce qui n'est qu'une de ces fonctions dérivées, savoir la dérivée par rapport à la quantité toute connue. Donnons un exemple.

Soit

$$u = \sum a_{pq}\, x_p\, x_q\,;$$

en donnant à p et q successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 et posant

$$a_{pq} = a_{qp},$$

on obtient les dix termes de la fonction homogène quadratique à quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 où les rectangles ont le multiplicateur 2 à cause de l'équation

$$a_{pq} = a_{qp}.$$

Prenant les dérivées de a successivement par rapport à ces quatre variables, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx_1} = u_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + a_{14}\, x_4,$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx_2} = u_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + a_{24}\, x_4,$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx_3} = u_3 = a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + a_{34}\, x_4,$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx_4} = u_4 = a_{41}\, x_1 + x_{42}\, x_2 + a_{43}\, x_3 + a_{44}\, x_4.$$

Le déterminant cramérien de ces équations est l'invariant de la fonction u.

On a le déterminant

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44} - \mathrm{P} + \mathrm{Q} - 2\mathrm{R} + 2\mathrm{S},\\
\mathrm{P} &= a_{11}\,a_{22}\,a_{34}^2 + a_{11}\,a_{33}\,a_{24}^2 + a_{11}\,a_{44}\,a_{23}^2 + a_{22}\,a_{33}\,a_{14}^2\\
&\quad + a_{22}\,a_{41}\,a_{13}^2 + a_{33}\,a_{44}\,a_{12}^2,\\
\mathrm{Q} &= a_{12}^2\,a_{34}^2 + a_{13}^2\,a_{24}^2 + a_{14}^2\,a_{23}^2,\\
\mathrm{R} &= a_{12}\,a_{34}\,a_{14}\,a_{23} + a_{12}\,a_{34}\,a_{13}\,a_{24} + a_{13}\,a_{23}\,a_{14}\,a_{24},\\
\mathrm{S} &= a_{11}\,a_{23}\,a_{24}\,a_{34} + a_{22}\,a_{13}\,a_{14}\,a_{34} + a_{33}\,a_{12}\,a_{14}\,a_{24}\\
&\quad + a_{44}\,a_{13}\,a_{13}\,a_{23};
\end{aligned}
$$

dans chaque terme les chiffres 1, 2, 3, 4 paraissent deux fois et pas davantage. Considérant $\dfrac{x_1}{x_4}$, $\dfrac{x_2}{x_4}$, $\dfrac{x_3}{x_4}$ comme les coordonnées d'un point de la surface $u = 0$, alors a_4 est la quantité toute connue et l'on a

$$\frac{d\mathrm{H}}{da_4} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}^2 + a_{22}\,a_{13}^2 - a_{33}\,a_{12}^2 + 2\,a_{12}\,a_{13}\,a_{23}$$

C'est cet invariant que l'on considère ici (p. 162) et il est insuffisant. Par exemple, il ne peut servir à trouver dans quel cas l'équation complète

$$u = 0$$

donne un ellipsoïde imaginaire; dans quel cas elle représente deux plans, un cône, etc. Il existe des relations d'identité entre les dix fonctions dérivées et qui facilitent les calculs. De même pour une surface algébrique de degré m, il existe un invariant, fonction de $\dfrac{m^2 + 3m + 2}{2}$ coefficients avec autant de dérivées partielles. Lorsque l'invariant général est identiquement nul, la surface devient un cône (théorème de Otto Hesse, si élégamment démontré par M. Brioschi, *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 402). Le déterminant d'une fonction littérale est la valeur extrême maximum de cette fonction. La disparition des rectangles dans une fonction quadratique est exposée ici et se trouve aussi dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret; il a été l'objet de beaux travaux de M. Sylvester. La découverte de ce qu'il appelle la *loi d'inertie* est fondamentale, même sous le point de vue géométrique (*voir* le beau Mémoire de M. Otto Hesse, *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 467, et Brioschi, t. XV, p. 269).

Le polynôme adjoint n'est autre que la polaire réciproque. Ses propriétés se rapportent à la classe de la courbe; c'est ce que nous ferons voir ailleurs.

Ve Partie. Sur la détermination du nombre des racines réelles des équations numériques qui sont comprises entre des limites données.

C'est nouveau et très-beau. On lit ici une démonstration très-simple du théorème Sylvester sur la composition des fonctions *sturmiennes*. Le célèbre analyste a bien voulu nous autoriser à insérer cette cinquième partie, et sa haute position dans la science et dans l'enseignement permettent d'espérer que ce travail agira sur le professorat et médiatement sur les élèves, et que tous se familiariseront avec ces mots encore étranges : déterminant, invariant, forme, adjoint, etc.

Terminons par une observation assez opportune. Les géomètres éminents, doués du génie d'invention, ont peu d'inclination à lire les travaux d'autrui et se trouvent assez riches de leurs propres idées. Il résulte de là souvent qu'en publiant ces idées ils s'exposent, comme on dit, à découvrir la mer Méditerranée. *A fortiori* ceux qui n'ont ni génie, ni lecture.

Note. M. Laguerre-Werly ramène la réduction des formes quadratiques à la réduction du système linéaire, et parvient ainsi facilement à des propriétés que M. Hermite démontre assez péniblement, par exemple à celles de la fonction dite *ff* dans le beau Mémoire sur les fonctions abéliennes.

NOUVELLES PREUVES DES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE; par *Auguste Bouché*, professeur de Mathématiques pures et appliquées au lycée impérial d'Angers. Paris, 1856; in-8 de 23 pages.

« Reconnaître si le résultat d'une opération est exact » ou inexact, et, dans le cas où il est inexact, trouver » dans quelle partie de l'opération la faute a été com» mise, tel est le double problème que nous allons ré» soudre. »

Ce début explique clairement le but, qui consiste dans le contrôle par 9. Les quatre opérations, la multiplication et la division abrégées, l'extraction de la racine carrée et cubique, sont successivement soumises à ce moyen de vérification. Il y a des signes certains qui annoncent que le calcul est inexact; il n'en existe point qui donnent une certitude que les résultats sont exacts. Les machines arithmétiques et certaines organisations jouissent seules de ce privilége. L'auteur fait des vérifications sur les diverses parties, ce qui peut faire découvrir l'endroit où l'on s'est trompé.

BIOGRAPHIE.

SIMON LHUILIER.

Simon-Antoine-Jean Lhuilier naquit à Genève le 24 avril 1750. Il montra de bonne heure des dispositions pour les mathématiques et eut pour professeur Louis Bertrand, l'auteur du *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* (*). Ce professeur était si

(*) Connu par sa démonstration des parallèles content des progrès de son élève, qu'il le désigna comme devant être un jour son successeur; mais ce qui était de plus grande importance pour le jeune Lhuilier, c'est l'amitié que lui a constamment témoignée son parent, le célèbre philosophe George-Louis Lesage, qui l'aida constamment de ses conseils et de ses leçons dans les mathématiques. Ces relations commencèrent le 26 juin 1766, à l'époque où Lhuilier, âgé de 16 ans, sortit du collége le premier. Il fut placé comme précepteur chez M. Rilliet-Plantamour, où il resta deux années, et suivit les leçons de physique de Lesage en 1768 et 1769 et aussi celles de M. de Saussure. N'ayant pas de fortune, Lhuilier manifesta à son parent le désir de chercher une meilleure condition au dehors. L'occasion s'en présenta en 1775. Le célèbre Wurtembergeois Christophe-Frédéric Pfleiderer (*), qui était élève et collaborateur de Lesage (1766-1769), avait été placé en 1766, à sa recommandation, comme professeur de mathématiques à l'Académie militaire fondée à Varsovie par le roi Stanislas-Auguste. Une Commission d'éducation, dont Pfleiderer était le membre le plus influent, mit en 1775 au concours un projet d'enseignement. Pfleiderer envoya les programmes à Lesage, qui aurait désiré que Lhuilier traitât la physique. Se défiant de ses connaissances en cette science, il préféra les mathématiques, et son ouvrage fut couronné et imprimé avec une traduction en polonais sous ce titre: *Arithmétique pour les écoles palatinales*; Varsovie, 1777. In-8. C'est son début, si l'on excepte l'opuscule : *Lettre en réponse aux objections élevées contre la gravitation newtonienne. Journal encyclopédique,* février 1773. Le roi Stanislas fit féliciter le jeune auteur, et le prince Czartorinski l'invita à venir à Varsovie faire l'éducation de son fils, devenu aujourd'hui le chef de l'émigration polo-

---

(*) Né en 1736, mort en 1821.

naise. Lhuilier accepta l'invitation. La longue suite d'années qu'il passa dans la maison du prince fut l'époque la plus heureuse de sa vie et aussi la plus féconde en travaux. Il publia successivement :

1. Mémoire sur le minimum de cire des alvéoles des abeilles et en particulier sur un minimum-minimorum relatif à cette matière (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1781).

2. De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometriæ considerata. Varsoviæ, 1782, in-4.

3. Sur les pyramides isopérimètres (*Nov. acta Peters.*, III).

4. Théorème sur les centres de gravité (*ibid*, IV).

5. Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, qui a remporté le prix proposé par l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres pour l'année 1786. Berlin; in-4.

La Commission qui a adjugé le prix était présidée par Lagrange. Le principe est celui des limites de d'Alembert.

6. Examen du Mémoire sur les poids et mesures, où l'on se propose d'avoir des étalons ou modèles de mesures et de poids qui soient réglés par des principes certains et invariables (*Journal encyclopédique*, juillet 1785).

7. Théorème sur les solides plans superficiels (*Mém. de Berlin*, 1786 et 1787).

8. Sur la décomposition en facteurs de la somme et de la différence de deux puissances à exposants quelconques de la base des logarithmes hyperboliques, afin de dégager cette décomposition de toute idée de l'infini (*Mém. de Berlin*, 1788 et 1789).

Vers la fin de son séjour en Pologne, il conçut le plan de sa *Polygonométrie*. Etant allé trouver à Tubingue son ami Pfleiderer, retourné dans sa patrie depuis 1781 comme professeur de mathématiques et de physique, celui-ci lui fit connaître les travaux sur le même objet que venait de publier Lexell dans les Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg. Toutefois, revenu à Genève, il publia :

9. Polygonométrie, ou de la Mesure des figures rectilignes et abrégé d'isopérimétrie élémentaire. Genève, 1789; in-4.

Pendant les troubles révolutionnaires qui agitèrent Genève, Lhuilier jugea prudent de se retirer auprès de son ami à Tubingue, où il passa plusieurs années. Il y publia :

10. Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris ad normam dissertationis ab. Acad. Scient. Reg. Prussica, A. 1786 præmii honore decoratæ elaborata. Tubingæ, 1795; in-4.

Il revint en 1794 à Genève et publia :

11. Examen du mode d'élection proposé à la Convention nationale de France en février 1793 et adopté à Genève. Genève, 1784; in-8.

12. Catéchisme d'Arithmétique, destiné aux écoles primaires.

En juillet 1795, il fut nommé enfin professeur à l'Académie de Genève comme Bertrand l'avait prédit.

13. Manière élémentaire d'obtenir les suites par lesquelles s'expriment les quantités exponentielles et les fonctions trigonométriques des arcs circulaires (*Philos. Trans.*, 1796).

Il avait été nommé membre de cette Société pendant son séjour à Tubingue.

14. Solution algébrique du problème suivant : A un cercle donné, inscrire un polygone dont les côtés passent par des points donnés (*Mém. de Berlin*, 1796).

15. Sur les probabilités (*Mém. de Berlin*, 1796).

16. Sur l'application du calcul des probabilités à la valeur des témoignages (*Mém. de Berlin*, 1797).

Ces deux derniers Mémoires avec la collaboration de Pierre Prévost.

17. Anleitung zur elementar-algebra. Zwei theile. Tubingue, 1799-1801; in-8.

18. Théorèmes de polyédrométrie présentés à l'Académie de Paris le 1er avril 1800 (11 germinal an VIII) et imprimés en 1805.

Contient le principe qui a servi à Carnot (*).

19. Eléments raisonnés d'Algèbre. Genève, 1804; 2 vol. in-8.

Traduction de l'ouvrage n° **17**.

20. Eléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliqués à la recherche des lieux géométriques. Paris, 1809; in-4. (Dédié à son ancien élève le prince Czartorinski, alors ministre de l'Instruction publique en Russie).

On trouve de lui, dans les trois premiers volumes des *Annales* de Gergonne :

21. Analogie entre les triangles rectangles, rectilignes et sphériques (tome I).

22. Recherche du plan de la plus grande projection orthogonale d'un système de surfaces données de grandeurs sur des plans donnés de position dans l'espace (tome **II**).

(*) Carnot et Lhuilier sont deux géomètres similaires : mêmes qualités, mêmes défauts.

23. Détermination du centre des moyennes distances du triangle sphérique (tome II).

24. Lieux aux sections coniques (tome II).

25. Eclaircissements sur le troisième et le sixième cas de la trigonométrie sphérique (tome II).

26. Solution d'un problème de combinaison (tome III).

27. Démonstrations diverses du théorème d'Euler sur les polyèdres et examen des divers cas d'exception auxquels ce théorème est assujetti (tome III).

28. Mémoire sur la possibilité et la construction des polyèdres réguliers (tome III).

29. Solution d'un problème de probabilité.

On ignore pourquoi la collaboration de Lhuilier a cessé avec ce III^e volume, qui a paru en 1812; car il a conservé son activité littéraire jusqu'à un âge très-avancé. Il ne prit sa retraite qu'en 1823 à l'age de 73 ans. Jusque-là il remplit ses fonctions avec une telle conscience, qu'attaqué de la goutte, il se faisait porter en classe pour donner ses leçons. Plusieurs de ses élèves, parmi lesquels fut pendant quelque temps M. Guizot, se distinguèrent dans les carrières scientifiques. Lhuilier donna beaucoup de soins à M. Sturm, devenu membre si distingué de l'Institut de France. Soigné par un fils et une fille, Lhuilier put jouir encore longtemps d'un repos si bien mérité. Il chercha toutefois à diverses fois à étendre ses idées.

30. Expressions de la capacité d'un polyèdre dans ses éléments extérieurs (*Bibl. univers.*, 1828).

31. Eléments de la doctrine générale des polygones et des polyèdres (manuscrit de 8 pages in-4 sans titre).

32. Discussion générale des doctrines des polygones et des polyèdres, par le professeur Lhuilier, plus qu'octogénaire (manuscrit de 3 pages in-4 sans titre.)

Cependant son intelligence s'obscurcissait peu à peu; en certains moments, il eut la triste conscience de cette décadence; il écrivit un jour d'une main tremblante :

> ... Je suis hors de saison,
> On ne veut plus d'un être octogénaire,
> Je suis voisin de perdre la raison,
> Je suis un poids qui surcharge la terre.

Il quitta la terre le 28 mars 1840, âgé de près de 90 ans.

Note. Cette biographie est extraite des *Mittheilungen der Naturforsanden Gesellschaft in Bern,* Communications de la Société des Explorateurs de la nature de Berne, ouvrage périodique d'un haut intérêt et rédigé avec beaucoup de talent par le professeur R. Wolf, secrétaire de la Société (voir *Nouvelles Annales,* t. X, p. 163).

BIBLIOGRAPHIE.

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE, exposés suivant le *Programme* de M. le Ministre de l'Instruction publique et des Cultes, du 30 août 1852, pour le baccalauréat ès Sciences; par *M. Furiet,* ingénieur au corps impérial des Mines, à l'usage des candidats aux Ecoles spéciales, aux élèves des Écoles professionnelles, des ingénieurs, conducteurs et de toutes les personnes qui désirent s'initier aux principes de la mécanique pratique. Paris, 1856; in-8 de xx-318 pages. Prix : 6 francs, chez Mallet-Bachelier, libraire.

On connaît maintenant deux méthodes pour enseigner la mécanique : l'ancienne méthode, celle des *couples,* la nouvelle ou celle des *quantités de travail.* Nous les désignons par ce qu'elles ont de plus caractéristique. Le titre de l'ouvrage annonce bien qu'il appartient au nouveau système. L'auteur consacre vingt pages d'avertissement à faire l'éloge de ce système et la critique de l'ancienne école. L'auteur est élève de cette ancienne école : quelque défectueuse qu'on la suppose, elle peut donc donner de bons produits.

Contrairement à l'opinion de d'Alembert, l'auteur considère les lois dynamiques et statiques comme des faits *contingents* et non comme des vérités apodictiques. La conservation des forces vives a été *démontrée* par Lagrange, Carnot, etc.; il est plus simple, selon M. Furiet, d'admettre cette conservation comme axiome, moyen d'abréviation.

M. Furiet ne fait aucun emploi de l'algorithme algébrique et s'en félicite. Nous regrettons de ne pouvoir partager ces opinions.

Avant d'aller plus loin, comparons les deux systèmes mentionnés ci-dessus. Voyons les connaissances qu'exige chacun d'eux, ce qui permettra de juger du degré de simplicité de l'enseignement.

I. *Connaissances exigées dans l'ancien système.*

1°. Composition et décomposition des forces de translation et de rotation (couples).

2°. Équations d'équilibre.

3°. Forces accélératrices.

4°. Equations-définitions;

$$v = \frac{de}{dt}, \quad \varphi = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2e}{dt^2},$$

$$\varphi de = mvdv, \quad 2\int\varphi\, de = mv^2 + \text{constante}.$$

5°. Mouvement hélicoïdal; double cône de M. Poinsot.

6°. Théorie du choc.

II. *Connaissances exigées dans le nouveau système.*

1°. Composition et décomposition des mouvements.

2°. Composition et décomposition des vitesses.

3°. Composition et décomposition des forces.

4°. Composition et décomposition des forces accélératrices.

5°. Composition et décomposition des travaux élémentaires.

6°. Composition et décomposition des quantités de travail.

En outre, forces motrices, forces de résistance, forces vives, etc.

Les équations-définitions, au lieu d'être *écrites*, sont *parlées* et traduites en théorèmes qui chargent la mémoire d'une foule de notions plus ou moins obscures.

Il est vrai que depuis qu'on a adopté une *unité* pour y rapporter $\int \varphi\, de$ et qu'on a inventé des instruments pour mesurer facilement cette intégrale, la science des machines s'est éclaircie et s'est beaucoup simplifiée en prenant cette intégrale comme point de départ; mais ajoutons que les machines sont dans la mécanique et la mécanique n'est pas dans les machines. Le système du monde, la dynamique électrique, magnétique, optique, ne sont pas des machines, et il faut pourtant les expliquer.

Dans ce gouvernement de l'univers physique, on ne rencontre ni pistons, ni roues, ni bielles, ni engrenages, etc., et quoique ne faisant usage que de mécanique rationnelle, cela ne marche pas moins bien que nos engins de mécanique pratique, et même un peu mieux.

On connaît la grande collection de Borgnis publiée par feu Bachelier; l'ouvrage de M. Furiet est pour ainsi dire un *synopsis* de cette collection, mais un *synopsis* raisonné, méthodique et tenant compte des progrès faits dans la science des machines.

L'ouvrage est divisé en trente-deux leçons; les quinze premières leçons sont consacrées à la théorie fondée sur la pratique.

I^re^ *Leçon* (1-12). Décrit les diverses espèces de mouvements : le pendule, le balancier, les échappements, instruments chronométriques.

II^e^ *Leçon* (13-22). Pesanteur comme application du mouvement continu; gravitation universelle.

III^e^ *Leçon* (23-33). Plan incliné de Galilée; machine d'Atwood et ses applications. Appareil à indications; un pinceau en mouvement trace une courbe sur un plateau qui a un mouvement uniforme connu; à l'aide de ce mouvement et de la forme de la courbe, on peut trouver le mouvement du pinceau et du corps auquel il est attaché.

IV^e^ *Leçon* (34-42). Composition des mouvements, des chemins parcourus et des vitesses. Balistique.

V^e^ *Leçon* (43-53). Plan incliné; poulies de diverses espèces; treuil; courbes à la Vaucanson pour obtenir un mouvement de translation à l'aide d'un mouvement de rotation; une courbe tracée sur un plan vertical tournant et appliquée contre une saillie faisant partie d'une tige verticale soulève cette tige et l'on peut tracer la courbe de telle sorte que le mouvement de translation soit uniforme. Transmission de mouvement à l'aide de courroies et de la chaîne de Vaucanson.

VI^e^ *Leçon* (54-65). Engrenages: roues, pignons, lanternes, crémaillère; tracés géométriques et pratiques; développantes du cercle. Cette dernière partie, si importante pour transmettre le mouvement à une grande distance, exigeait plus de développements.

VII[e] *Leçon* (65-74). Engrenages coniques; vis et son écrou; vis sans fin; engrenage de Watt: ce sont des dents hélicoïdales en saillie sur une roue qui engrène dans des hélices creusées dans une autre roue. On donne la transformation du mouvement circulaire en rectiligne de La Hire sans le citer. On ne parle pas de l'engrenage imaginé par Olivier.

VIII[e] *Leçon* (75-84). Forces de diverses natures; dynamomètres à ressorts.

IX[e] *Leçon* (85-91). Proportionnalité des forces aux vitesses; unité de force. On définit la masse par la *quantité de résistance,* ce qui est peu clair. C'est le poids qui donne la mesure des masses: mais la pesanteur disparaissant, la masse n'en subsistera pas moins.

X[e] *Leçon* (92-100). Dynamomètre, frein de Prony, cheval-vapeur, etc.

XI[e], *XII*[e], *XIII*[e] *et XIV*[e] *Leçon* (101-134). Principes théoriques sur la composition des forces, sur le centre de gravité, etc.

C'est à la XV[e] Leçon que commence la mécanique pratique proprement dite.

Parlant du principe de Carnot, M. Furiet dit: « On se demande comment un principe aussi évident a pu faire honneur à son auteur au point d'en porter le nom (p. 131). » Singulière demande!

Les Leçons XV, XVI, XVII roulent sur les machines simples, ayant égard aux frottements, à la roideur des cordes, etc., avec les expériences principales qui s'y rapportent; description de diverses balances, peson, pèse-lettres; le tout assez succinctement.

L'hydraulique commence à la XVIII[e] Leçon et finit à la XXI[e] Leçon. En un si petit nombre de pages, on ne peut s'attendre à trouver de grands détails sur les diverses espèces de roues, à augets, à aubes, à la Poncelet, turbines, etc. Pour bien comprendre ces engins, il faut les connaître.

Toutes les espèces de pompes, la vis d'Archimède, les norias, chapelets, sont l'objet de la XXII[e], XXIII[e] et XXIV[e] Leçon. On considère ensuite le vent comme moteur. On donne des notions sur la mouture du blé dans la XXV[e] Leçon. Des expériences récentes obligent de modifier quelques énoncés sur les effets du blutage et la formation du gruau. La XXVI[e] Leçon, consacrée aux moteurs animés, homme, cheval, bœuf, mulet, renferme des données curieuses et instructives. Les six dernières Leçons traitent des machines à vapeur. On en donne d'abord l'historique (XXVII[e] leçon) dont l'absence ne serait pas regrettée. Viennent ensuite les descriptions des machines de Newcomen, de Watt, des bateaux à vapeur, des locomotives, etc.; on explique la détente, l'effet simple et double, et comment ce dernier est remplacé par des tiroirs qui communiquent simultanément avec le condenseur et avec la chaudière, et alternativement en sens opposé.

L'auteur termine ainsi :

« Nous n'avons dû faire qu'une esquisse rapide des
» principes de la mécanique et présenter les faits géné-
» raux de la science seulement, avec les objets dont elle
» s'occupe, non avec leurs dimensions réelles, mais pour
» ainsi dire réduites. »

On a, en effet, ici beaucoup de faits et de données numériques qu'il est commode de trouver réunis et les connaissances pratiques de l'auteur inspirent toute confiance. L'ouvrage sera consulté avec fruit par ceux qui ne sont pas étrangers à la langue de la technologie et qui connaissent les engins, au moins de vue.

MEMORIA INTORNO AD ALCUNE TRANSFORMAZIONI D'INTEGRALE MULTIPLICI; del signor *Angelo Genocchi* (juillet, 1853).

On parvient souvent, au moyen de *transformations*, à ramener une équation à une autre de degré moindre; d'une manière analogue, par des procédés métamorphiques, on ramène souvent une intégrale à une autre d'une multiplicité moindre, quelquefois intégrable ou du moins évaluable lorsque l'intégrale est *définie*, cette dénomination étant prise dans un sens général, c'est-à-dire lorsqu'il existe une certaine relation entre les variables indépendantes. De grands géomètres se sont occupés de cette matière, et dans les derniers temps MM. Lamé, Catalan, W. Roberts, etc. Le but du présent Mémoire est de parvenir aux résultats obtenus par ces géomètres à l'aide de transformations uniformes et très-simples. Il ne nous est pas permis d'entrer dans de grands détails et nous devons nous borner à citer un spécimen.

Soit φ une fonction des n variables indépendantes x_1, $x_2,\ldots, x_n$ assujettie à la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

et soit l'intégrale multiple

$$\int \varphi\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_{n-1}.$$

Posons

$$a_r\, x_r = \rho y_r;$$

r prenant successivement les valeurs $1, 2, 3,\ldots, n$, les a sont des constantes, et supposons

$$\sum_1^n (y_r)^2 = 1,$$

nous aurons

$$\rho^2 = \sum_1^n (a_r x_r)^2, \quad \frac{1}{\rho^2} = \sum_1^n \left(\frac{y_r}{a_r}\right)^2,$$

d'où

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n^2 \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1} = \rho^{n+1} \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_{n-1},$$

$$\int \frac{dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{\rho^{n+1}} = \frac{1}{a_n^2} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \int dy_1 \, dy_2 \ldots dy_{n-1}$$

$$= \frac{1}{a_n^2 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Par ce genre de considérations, l'auteur parvient facilement aux intégrales données dans le *Journal* de M. Liouville par M. Catalan, t. IV, p. 333, et par M. William Roberts, t. XI, p. 201 et à l'aire de l'ellipsoïde donnée par M. Cayley dans le même journal, t. XIII, p. 267.

La II^e Partie traite des intégrales abéliennes, c'est-à-dire des intégrales $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$, P et R étant des fonctions entières de x^2. L'auteur prend pour équation de condition

$$\frac{x_1^2}{a_2 - a_1^2} + \frac{x_2^2}{a^2 - a_2^2} + \frac{x_3^2}{a^2 - a_3^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a^2 - a_{n-1}^2}$$

$$+ \frac{x_n^2}{a^2 - a_n^2} = 1.$$

On voit que c'est là une généralisation des coordonnées elliptiques de M. Lamé ; faisant

$$n = 3,$$

l'auteur parvient à des relations entre des fonctions elliptiques et à de très-beaux théorèmes, dont plusieurs sont connus, mais démontrés ici d'une manière très-uniforme et fort simple. Puissions-nous inspirer le désir de lire cette instructive et attrayante production !

Tables of Logarithms of the natural numbers from 1 to 108000, by *Charles Babbage,* esq. Fellow R. S. L., etc. Stereotyped. London. Printed for J. Mawman, 1827, by William Clowes. Grand in-8. Préface et Introduction xx pages, Tables 202 pages.

Ces Tables sont à 7 décimales et ne contiennent que les logarithmes des nombres.

L'ouvrage est dédié à M. Colby, lieutenant-colonel du génie, ami de l'auteur, qui a examiné avec lui beaucoup de Tables logarithmiques.

Voici les précautions prises pour assurer l'exactitude de l'impression.

Un exemplaire de Callet (7 décimales) a été comparé avec les Tables in-folio de Vega (10 décimales), et, lorsque par suite de cette comparaison la dernière décimale de Callet a dû être augmentée d'une unité, on l'a *marquée* à l'encre rouge, et cette dernière décimale était ensuite *imprimée* avec un point au-dessous du chiffre. Chaque première épreuve de ces Tables a été lue trois fois et :

1°. Conférée avec les Tables *marquées* de Callet.

2°. Conférée avec les Tables de Hutton, 4e édit., 1804.

3°. Conférée avec les Tables de Vega in-folio.

4°. 2e épreuve. Conférée avee les Tables de Vega de 1 à 100 000 et les derniers 8 000 avec les Tables de Callet.

5°. Les premiers 20 000 avec la *Trigonometria britannica* de Briggs. Folio, Goudæ, 1633.

Alors cette épreuve a été stéréotypée et les épreuves des planches étaient conférées :

6°. Avec les Tables de Vega jusqu'à 47 500.

7°. En entier avec les Tables de Gardiner. In-4; London, 1742.

8°. Les Tables de Taylor. In-4, 1792.

9°. Et encore par divers lecteurs avec ces dernières Tables.

C'est M. Colby qui a surveillé et dirigé toutes les collations à partir de la quatrième.

Dans les Tables de Vega avec 10 figures décimales il y en a 73 terminées par 500 ou 499, 40 terminées par 4999 et 5000 et 2 par 49999 et 50000. Pour lever le doute qui pouvait en résulter sur la 7e décimale conservée, il fallait des Tables avec 15 figures. M. Babbage se rendit à cet effet à Paris, et grâce à Laplace, Bouvard et aux autres membres du Bureau des Longitudes, il put consulter les célèbres Tables manuscrites calculées sous la direction de Prony et conservées à l'Observatoire, et il exprime le vœu que ces *treasures of calculation* puissent être rendus indestructibles par la stéréotypie, vœu qui pourra être exécuté en 2440 quand nous aurons un observatoire digne de la France.

De la comparaison faite avec la coopération de M. Colby de toutes les Tables existantes, M. Babbage déduit ces douze règles :

I. La clarté et la facilité de la lecture ne dépendent pas seulement de la grandeur du type, mais de la proportion entre ce type et les intervalles entre les lignes horizontales.

II. Les chiffres de même hauteur ou à peu près sont préférables à ceux où quelques-uns tombent au-dessus et d'autres en dessous de la ligne (*).

(*) Qu'un auteur anglais préconise l'usage des *chiffres anglais*, c'est-à-dire de chiffres ayant tous une égale hauteur, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 et les préfère aux *chiffres français* d'inégale hauteur 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0,

III. Les filets verticaux séparant les colonnes ne doivent pas être placés au milieu de l'espace blanc qu'on ménage entre chaque colonne, mais près de la colonne de gauche, de sorte que chaque série verticale de chiffres est précédée d'un espace blanc, disposition favorable à la vue.

IV. Lorsqu'une partie de la Table doit être séparée du reste d'une manière plus saillante, un seul filet *mince* est plus en évidence que deux filets maigres adjacents (C'est ce qui a lieu dans Callet pour séparer les minutes des nombres).

V. Les chiffres qui servent d'entrée doivent être distingués soit par la position, soit par la grandeur, de manière à frapper l'œil rapidement.

Dans les Tables de Babbage, les quatre premières décimales sont d'un plus grand type que les autres, de même les chiffres placés au haut et au bas de chaque page.

VI. Lorsque les dixièmes, centièmes, millièmes restent les mêmes dans plusieurs lignes, on ne les imprime qu'une fois; sous plusieurs rapports, il vaudrait mieux les répéter. L'œil n'aura pas besoin de chercher.

---

cela s'explique par la longue habitude qu'il a de lire les premiers. Mais il suffit de comparer les deux types pour comprendre et justifier la préférence que les mathématiciens français ont toujours accordée aux chiffres qui, par les différences de leurs hauteurs, attirent et fixent mieux l'attention et offrent par là moins de chances d'erreur. Ainsi soit le nombre 1327698—1327698, écrit avec les deux genres de types : il est évident que les chiffres du second sont plus distincts et partant plus lisibles que les premiers. Soutenir le contraire, ce serait dire qu'il est plus facile de lire une page de majuscules qu'une page imprimée en minuscules ordinaires : ce qui est contraire à l'opinion et à l'expérience de tous les typographes. Aussi l'imprimerie Mallet-Bachelier, en restant dans la voie des saines traditions, a constamment reçu les encouragements de nos plus grands géomètres.

(BAILLEUL, Directeur de l'imprimerie Mallet-Bachelier.)

Dans les Tables de Babbage cette règle n'a pas été observée, on s'est aperçu trop tard de son utilité. Elle est observée dans toutes les petites Tables in-12.

VII. Lorsque au milieu d'une même ligne la troisième décimale change, il faut indiquer ce changement par un signe quelconque sans déplacer les quatre derniers chiffres.

M. Babbage indique ce changement au moyen de la quatrième décimale écrite en petits caractères.

Par exemple, le logarithme de 23334 est 3679892, les trois premiers chiffres sont 367; le logarithme du nombre suivant de la même ligne, savoir celui du nombre 23335, est 3680078; on voit que le troisième chiffre 7 est changé en 8; cela est indiqué en écrivant 0078 où le premier des quatre chiffres est en petit caractère. Dans les Tables de Callet, cette indication consiste à abaisser 0078 au-dessous de la ligne et à laisser une partie blanche, ce qui est désagréable à la vue.

VIII. Lorsqu'un renseignement additionnel peut être donné dans la Table sans augmenter le volume ni la dépense, il faut le donner, à moins que cela ne distraie trop l'attention des recherches les plus fréquentes.

La réduction des nombres en degrés, minutes, secondes est une addition utile. Ces résultats sont placés à la gauche de chaque page, mais sont séparés des nombres par une large ligne noire. Les minutes sont en plus gros caractères que les secondes; les unes et les autres sont en plus petits caractères que les nombres; chaque page ne contenant que 50 nombres et non 60 comme dans Callet, l'indication des trois premiers chiffres des nombres en tête de la Table devient plus facile.

Une autre addition est d'indiquer si le logarithme est par excès. Alors on a placé un *point* sous la 7^e décimale, moyen très-simple et de facile exécution et qui devrait être généralement adopté.

IX. Chaque page doit être encadrée par de larges filets ou par des lignes de diverses couleur.

Chaque Table doit avoir un titre courant en tête de chaque page et aussi concis que possible.

X. Il faut éviter que les chiffres d'une page ne déteignent sur le côté opposé.

Cela arrive souvent lorsque le volume est broché avant que l'encre ne soit entièrement sèche.

XI. Il faut éviter, par la même raison, de prendre un papier trop transparent.

XII. Un papier *coloré* rend les caractères plus distincts qu'un papier blanc (*).

M. Babbage a essayé des papiers de diverses couleurs et teintes. Toutes les personnes qu'il a consultées ont donné unanimement la préférence au papier de couleur, mais il y a diversité sur la teinte. Il a donné la préférence à la couleur jaune. Les tables sont imprimées sur du papier jaune.

(*) Cette assertion n'est vraie qu'en ce sens qu'une teinte moins vive que le blanc fatigue moins la vue; mais *en soi* elle ne rend pas les caractères plus distincts. (BAILLEUL.)

BIOGRAPHIE.

NEWTON.

Isaac Newton est né à Woolsthrope près Grantham (Lincolnshire) le 25 décembre 1642, à 1 ou 2 heures du matin, en temps de pleine lune.

13 ans (1655). — Est envoyé à l'école de Grantham.

14 ans (1656). — Est retiré pour vaquer à des travaux agricoles. Lit des ouvrages mathématiques en gardant les moutons.

18 ans (1660). — Renvoyé à l'école pour se préparer au collége.

19 ans (1661). — Admis comme *subsizar* au collége de la Trinité à Cambridge. Devient *sizar*.

22 ans (1664). — Observe deux halos autour de la lune.

23 ans (1665, janvier). — Prend les premiers degrés (B. A.); John Pulleyn est le *tutor* de Newton : chaque professeur peut choisir son pupille. — 20 mai, Mémoire sur les fluxions; il se sert du *point;* différentiation d'une équation à plusieurs variables. — 13 novembre, application aux tangentes des courbes.

24 ans (1666, 25 mars). — Apprend à polir les verres, fait un prisme; découvre l'inégale réfrangibilité des rayons; a l'idée du télescope à réflexion, qu'il reprend deux ans après; forcé de quitter Cambridge à cause de la peste. Pendant le temps de ces expériences pour maintenir son attention, il vivait de pain et de quelques verres de vin d'Espagne (sec). Les écoliers boursiers, tel était Newton, recevaient pendant ce temps 3 sh. 4 d. par semaine.

25 ans (1667). — *Fellow minor.* Obtient une chambre devenue depuis la sacristie.

26 ans (1668). — *Fellow major* en mars et maître ès-arts (M. A.) en octobre.

Il était le vingt-troisième sur une liste de 143 signée par le pro-recteur Thomas Burnet, auteur de la *Theoria telluris sacra.*

Fait un télescope à réflexion : 6 pouces de long; ouverture un peu plus de 1 pouce, verre plan convexe, épaisseur $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$ de pouce, force amplifiante 40.

27 ans (1669). — Lettre sur son télescope à son ami Francis Aston. — 31 juillet, son ouvrage *De analysi* envoyé par Barrow à Collins. — 29 octobre. Nommé professeur Lucasien (chaire établie le 19 décembre 1663).

Objets d'enseignement : géométrie, arithmétique, astronomie, géographie, optique, statique. D'après les statuts : une leçon d'une heure une fois par semaine et deux fois par semaine pendant deux heures; le professeur doit laisser accès libre auprès de lui.

28 ans (1670). — Sommation de séries harmoniques; solution du problème d'annuités.

29 ans (1671). — Construit son second télescope à réflexion; existe dans la collection de la Société Royale. — 21 décembre. Est proposé comme membre de la Société Royale; perfectionne la méthode des séries infinies.

30 ans (1672). — Elu membre le 6 janvier. — 2 février. Lettre à Oldenbourg annonçant sa découverte sur la lumière. Anecdote sur le combat naval du 28 mai entre les Anglais et les Hollandais. D'après le bruit du canon, il annonce, étant à Cambridge, la victoire des Hollandais.— 10 décembre. Lettre à Collins contenant l'histoire de sa méthode des tangentes citée dans la 3e édition des

Principes, p. 246; au lieu de deux autres lettres à Leibnitz dans les deux premières éditions; cette lettre envoyée à Leibnitz le 26 juillet 1676 (*).

31 ans (1673).— Désire se retirer de la Société Royale. Dans une lettre à Collins, il dit ne pas connaître assez le français pour lire sans dictionnaire.

32 ans (1674, 20 juin). — Lettre à Collins; la vitesse horizontale du boulet n'est pas uniforme.

33 ans (1675, 29 janvier). — Demande à être exempté de payer la rétribution hebdomadaire à la Société Royale (1 schelling); il obtient l'exemption à raison de sa position gênée. Explication des couleurs dans les bulles de savon et plaques minces. La libration de la lune, dans une lettre à Mercator. Longueur d'un arc elliptique.

37 ans (1679). — Propose le 28 novembre une expérience pour constater le mouvement de la terre par la chute des graves, devant tomber à l'est de la verticale.— 18 décembre. Charles Montagu est immatriculé comme *scholar* au collége de la Trinité. Montagu, comte d'Halifax, devenu veuf, prend pour diriger sa maison Catherine Barton, d'une beauté remarquable, nièce de Newton, veuve du colonel Barton; elle épouse Conduitt. Le comte, étant devenu ministre d'État, nomme Newton intendant de la Monnaie (**). Détermine la courbe décrite sous l'action d'une force centrale.

42 ans (1684, août). — Montre à Halley quelques théorèmes sur les lois des mouvements célestes.

43 ans (1685, avril 25). — Détermine les attractions des masses et complète la démonstration des lois de la gravitation. Finit le II[e] livre des *Principes*, dans l'été.

(*) Fameuse pièce au procès (voir le *Commercium epistolicum*, p. 89 et 193, édition de Paris).

(**) Montagu est né en 1661 et mort en 1715.

44 ans (1686). — Premier livre des *Principes* (manuscrit) présenté à la Société Royale. — 2 juin. Halley entreprend l'impression des *Principes* à ses frais.

45 ans (1687).— Publication des *Principia* vers la fin de l'été. Prix : 5 et 10 schellings (*voir* de Moivre, *Histoire de l'Académie, Éloge,* 1754).

46 ans (1688). — Quitte le collége de la Trinité.

47 ans (1689).— Nommé un des députés de l'Université de Cambridge au Parlement-Convention (Laplace, *Système du Monde*, p. 372; Paris, 1824). Les principes du système social furent posés dans l'année suivante, et Newton concourut à leur établissement. Première connaissance avec Locke. Huyghens présente à la Société Royale sa théorie de la double réfraction. Prorogation du Parlement.

48 ans (1690). — Lettre à Locke sur la corruption de deux passages de l'Ecriture. (*Historical account of two notable corruptions of Scripture.*)

49 ans (1691). — Lettre à Locke sur Daniel et l'Apocalypse.

51 ans (1693). — Commencement de sa maladie. Ecrit une lettre singulière à Samuel Pepys; demande à ne plus être de ses connaissances. Se plaint de ne plus manger ni dormir.

51 ans (1693). — Lettre à Pepys sur le problème des chances.

52 ans (1694). — David Gregory vient à Cambridge consulter Newton. — 1^{er} septembre. Visite Flamsteed à Greenwich qui lui montre cent cinquante observations de la lune. Correspondance entre eux. Lettre à Flamsteed: équation parallatique de la lune. Lettre à Flamsteed :

équation lunaire du soleil. Tables de réfraction. Moyen mouvement des satellites de Jupiter.

53 ans (1695). — Tables des réfractions terminées. Parallaxe horizontale de la lune; équation de l'apogée et de l'excentricité.

54 ans (1696). — Est nommé intendant de la Monnaie (*wardenship*) par le ministre comte d'Halifax, ami de la nièce de Newton, devenue épouse de Conduitt.

55 ans (1697). — Solution de deux problèmes de Bernoulli.

57 ans (1699). — Associé étranger à l'Académie des Sciences.

58 ans (1700). — Mémoire sur l'équinoxe vernal. Changement de calendrier.

59 ans (1701). — Échelle de chaleur. Elu par l'Université de Cambridge député au Parlement. Renonce à sa place de professeur et de fellow.

60 ans (1702). — *Lunæ theoria*, publiée dans l'*Astronomie* de Gregory.

61 ans (1703). — Président de la Société Royale.

62 ans (1704). — Miroir ardent. Publication de l'*Optique* en anglais.

63 ans (1705). — Actes de Leipzig. Expression équivoque. Commencement de la polémique. — Janvier. Nommé chevalier par la reine Anne; vient trop tard à Cambridge pour y soigner son élection. N'est pas renommé député au Parlement.

64 ans (1706). — Edition latine de l'*Optique*. Traduction de Samuel Clarke. Newton fait présent à Clarke de 500 liv. sterl. Moivre soigne et revoit la traduction.

65 ans (1707). — Coopère aux statuts de la chaire Plumian. Le Dr Plume, archidoyen de Rochester, prît tant de plaisir à la lecture du *Cosmothéoros* de Huyghens, qu'il légua 1800 liv. sterl. pour fonder une chaire d'astronomie à Cambridge. Cotes fut le premier professeur élu le 16 octobre 1707.

67 ans (1709).— Commencement de sa correspondance avec Cotes pour la 2e édition des *Principes.*

71 ans (1713). — 2e édition des *Principes*, au milieu de l'été. 1re édition du *Commercium epistolicum.*

72 ans (1714). — Longitude. Affaire des longitudes.

76 ans (1717). — Rapport sur la monnaie, par suite les guinées réduites de 21 sh. 6 d. à 21 sh.

79 ans (1718). — 2e édition de l'*Optique.*

79 ans (1721). — 3e édition de l'*Optique.*

80 ans (1722). — Attaque de la pierre.

82 ans (1724). — Lettre à Halley sur les comètes. Prépare une 3e édition des *Principes.*

83 ans (1725). — Attaque de goutte. Conversation avec Conduitt sur la formation des corps planétaires.

84 ans (1727, 2 mars). — La dernière fois à la séance de la Société Royale demande pourquoi l'astronome royal Halley n'a pas envoyé la copie de ses observations annuelles.

Mort le 20 mars entre 1 et 2 heures du matin, laissant une fortune évaluée à 81,821 liv. st. 16 sh. 10 deniers = 616,420 francs partagés entre huit parents ; une bibliothèque de 4,000 volumes vendue 400 liv. ster., et 100 paquets de brochures.

(Extrait de *Correspondance of sir Isaac Newton, etc.*, by Edlestone ; 1850.)

NOTICE HISTORIQUE SUR LA RESOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ ;

D'APRÈS COSSALI, t. II, p. 96-184 (*).

Les Indiens, les Grecs et les Arabes savaient résoudre les équations binômes du troisième degré. Cette résolution se ramène immédiatement à une simple division ou à une extraction de racine carrée ou cubique. On doit la résolution d'une équation trinôme du troisième degré (**) aux Italiens du XVIe siècle. L'histoire de cette découverte jette un grand jour sur les mœurs et l'état des mathématiciens du temps. Les combats singuliers apportés en Occident par les Barbares du Nord, qui se livrent malheureusement encore aujourd'hui dans les champs de l'hon-

(*) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra. Storia critica di nuove disquisitione analitiche e metafisiche arrichita di* D. Pietro Cossali, C. R. Deux volumes in-4. Ier volume 1797, 396 pages. IIe volume 1709, 492 pages. Dalla reale tipografia Parmense.

Le P. Cossali, de l'ordre des Theatins, né en 1748, est mort à Vérone en 1815.

(**) M. Libri cite une solution de l'équation du troisième degré contenue dans un manuscrit du XIVe siècle : solution fausse donnee par analogie avec la solution des équations du second degré. *Exemple* :

$$px^3 = ax + b,$$

on donne

$$x = \frac{a}{2p} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2p}\right)^2 + b}.$$

(*Hist. des Mathém.*, t. II, p. 213.)

La disparition de M. Libri est une perte déplorable. C'était un vrai savant.

neur (*), existaient aussi alors dans les champs de la science. On se portait des défis publics, non-seulement pour acquérir de la gloire, mais aussi dans l'intérêt de l'existence. Le vaincu, perdu de réputation, ne trouvait plus de disciples : tandis que le vainqueur était appelé par diverses cités à venir professer et à expliquer les auteurs classiques. Dès lors les inventeurs se gardaient bien de divulguer leurs découvertes; car, munis de ces armes secrètes, il trouvaient plus avantageux de proposer des questions dont la solution reposait sur l'objet de ces découvertes. Pourtant ce secret intéressé porta malheur, comme nous l'allons voir, au célèbre Tartaglia, véritable auteur des formules qu'on s'obstine à nommer *formules de Cardan.*

Paccioli, dans son ouvrage (**) qui a paru en 1494, au VIII[e] chapitre du VI[e] traité de la VIII[e] distinction, énumérant les équations biquadratiques, dit : *Ma de capitoli de numero cosa et cubo composte over de numero censo e cubo over de numero cubo e censo de censo non se possut finora troppo bene formare regole generali per la disproporzionalita fra loro, perche fra loro non*

(*) Dénomination dérisoire! Comment un homme vivant sous l'empire de l'Évangile peut-il tenir à honneur de *tuer* son semblable pour se venger d'une injure consistant le plus souvent en une parole blessante. On ferait disparaître ce vestige de barbarie féodale, en le flétrissant par une perte des droits politiques, par une exclusion des fonctions publiques.

(**) *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita.* In-folio, écriture gothique. A la fin, on lit :

Con spesa e diligentia e opificio del prudente huomo Paganino de Paganini da Brescia : nella excelsa cita de Venezia, con gratia del suo excelso dominio che per anni x *proximi nell altro in quello la possi restampare ne altrove stampata in quello poi tarla sotto pena in ditta gratia contenuta negli anno de nostra salute* MCCCCXCIII *a li* 10 *de novembre, Augustino Barbadico, serenessimo principe di quello. — Frater Lucas de Burgo, sancti Sepulcri ordinis Minorum et sacre theologie humilis professor, suo parvo ingenio ignaris compatiens hanc Summam Arithmetice et Geometrie proportionumque et proportionalitatum edidit ac impressoribus assistens die noctuque pro posse manu propria castigavit. Laus Deo* (voir *Nouvelles Annales,* t. XII, p. 39).

sono intervalli equali. Cela signifie en écriture moderne que les trois équations

$$n = ax + bx^3,$$
$$n = ax^2 + bx^3,$$
$$n = ax^3 + bx^4$$

ne peuvent encore *jusqu'aujourd'hui* être généralement résolues. Il donne une singulière raison de cette impossibilité : c'est qu'entre x et x^3 il y a un milieu, c'est x^2 (*media el censo*), tandis qu'entre le nombre et la chose x il n'y a pas de milieu.

Néanmoins, il ne croit pas à une impossibilité absolue. Aussi un nommé Scipion Ferro ou dal Ferro, né à Bologne où, au dire d'Alidosi et de Cardan, il enseignait les mathématiques, de 1496 à 1526, réussit à résoudre l'équation de la forme

$$x^3 + px = q,$$

et il en communiqua la pratique à son élève Antonio Maria Fiore ou del Fiore.

C'est tout ce qu'on sait de cette découverte, dont on ignore complétement la méthode. Il n'en est pas ainsi de la découverte de Tartaglia, sur laquelle on a beaucoup de renseignements donnés par lui-même dans son ouvrage : *Quesite et inventioni diverse.*

Ce sont des questions adressées à Tartaglia par diverses personnes, avec les réponses, le tout sous forme de dialogues. Les huit premiers livres roulent sur la balistique, la fortification, l'art militaire, la mécanique, etc. (*).

Le IX^e et dernier livre porte pour titre : *Sopra la scientia arithmetica, geometrica et in la pratica speculativa de algebra et almucabala, volgarmente detta*

(*) La partie balistique a été traduite par M. Rieffel, professeur à l'École d'artillerie de Vincennes.

Regola de la cosa, over Arte maggiore et massime della inventione de Capitoli de cosa e cubo equal a numero, et altri suoi ederenti et dependenti, et simelmente de censi et cubi equal a numero et suoi dependenti, qualli dalli sapienti sono stati giudicati impossibili (*).

Cardan se sert aussi du mot *capitulum* pour désigner une équation. On voit qu'il s'agit de la résolution des équations cubiques de ces deux formes

$$x^3 + px = q$$

et

$$x^3 + px^2 = q$$

On arrangeait les équations de manière à ne renfermer que des termes positifs dans chaque membre, et une équation ainsi arrangée était considérée comme l'en-tête du problème, *Capitulum*.

Ce livre renferme quarante-deux questions; la quatorzième a été proposée en 1530 par Zuane de Torrini da Coi (**), qui tenait école d'arithmétique à Brescia. Il demande: 1° de trouver un nombre qui multiplié par sa racine augmentée de 3 fasse 5, et semblablement de trouver trois nombres tels, que le deuxième surpasse le premier de 2, que le troisième surpasse le deuxième de 2, et que le produit des trois nombres soit égal à 1000. Selon l'écriture actuelle, on parvient aux équations

$$x^3 + 3x^2 = 5,$$
$$x^3 + 6x^2 + 8x = 1000.$$

Tartaglia répond qu'il possède une règle *générale* pour

(*) La première édition est de 1546, in-4. On lit à la fin : *Stampata in Venetia per Venturino Ruffinelli ad instantia et requisitione et a proprie spese de Nicolo Tartalea Brisciano autore, nel mese de Luio, l'anno de nostre salute* MDXLVI

(**) Cardan le nomme da Colle et da Colla; Zuane pour Giovanne; les Vénitiens changent souvent le *g* en *z*; *mazore* pour *maggiore*.

résoudre la question du cube et des *censi* égaux à un nombre; mais, pour plusieurs raisons, il veut, pour le présent, se taire (*per al presente voglio tacere per piu respetti*); quant à la seconde question, il avoue ne pas en connaître la solution, mais qu'il est bien loin de la croire impossible, et commence par dire vertement à Zuano : « Je sais que les professeurs de Brescia vous craignent et vous fuient, parce que, pour vous faire passer pour un grand mathématicien, vous leur faites des questions que vous-même ne savez pas résoudre, et je parie dix ducats contre cinq qu'il en est ainsi de vos deux questions. C'est un procédé dont vous devriez rougir. » (*Et circa cio ve dovi resti alquanto a rossire.*)

Cette question XXV fut portée à Venise, où Tartaglia était professeur, par un nommé Antonio de Cellatica, et, dans sa question XXV, 10 décembre 1536, Tartaglia annonce qu'il a trouvé la solution de l'équation

$$x^3 + n = mx^2$$

le lendemain du jour où il a trouvé la solution de l'équation

$$x^3 + mx^2 = n.$$

Nous ferons observer une fois pour toujours que Tartaglia ne fait usage ni de nos signes ni de nos exposants. Comme les Arabes, il parle des *capitoli* et ne les écrit pas; dans son langage, la *cosa* c'est l'inconnue, le *censo* c'est le carré, et le *cubo* c'est le cube (*); ainsi, pour exprimer la dernière équation, il emploie cette locution : *cubo e censi egual a numero*, et ainsi des autres.

Cependant Antonio Maria del Fiore, ce disciple de Scipion Ferro dont nous avons parlé ci-dessus, se van-

(*) Cardan nomme aussi l'inconnue *res* et aussi *positio*, du verbe *ponere*; on ne posait que des quantités positives.

tait de venir humilier Tartaglia pour sa prétendue habileté dans la solution des problèmes. Tartaglia, sachant que del Fiore n'était qu'un arithméticien sans aucune connaissance théorique, ne tint aucun compte de ces vanteries; mais ayant appris que del Fiore était en possession de la règle générale de résoudre le *chapitre* (*capitole*) du *cube* et de la *chose* égale au nombre, qu'un grand maître lui avait enseigné, il y a une trentaine d'années, il commença à avoir des craintes, s'appliqua à ce *chapitre*, et parvint à en trouver la solution le 14 février 1535, et le lendemain il trouva la solution des équations

$$x^3 = px + q,$$
$$x^3 + mx^2 = n,$$
$$x^3 + n = mx^2$$

Bien lui en prit. Car, huit jours après cette découverte, le 22 février 1535, del Fiore vint à Venise où Tartaglia professait alors, et lui porta un défi public qui fut accepté. Del Fiore déposa chez le notaire Jacomo Zambelli trente questions et une certaine somme d'argent; Tartaglia en fit autant. Celui des deux qui, au bout de trente à quarante jours, aurait résolu le plus de questions serait déclaré vainqueur et gagnerait la somme déposée. Voici les trente questions de del Fiore, telles qu'elles sont énoncées dans la question XXXI des *Quesiti*.

1. Trouver un nombre qui ajouté à sa racine cubique fasse 6.

2. Trouver deux nombres en proportion double (x, $2x$) tels, que si l'on multiplie le carré du grand nombre par le plus petit nombre et qu'au produit on ajoute les deux nombres, on obtienne 40.

3. Trouver un nombre qui ajouté à son cube fasse 5.

4. Trouver trois nombres en proportion triple (x, $3x$, $9x$) tels, que le carré du plus petit multiplié par le plus

grand et ajoutant au produit le nombre moyen, la somme soit égale à 7.

5. Deux hommes mettent en société un capital de 900 ducats; le premier met la racine cubique du second. Quelle est la part de chacun?

6. Deux hommes gagnent ensemble 100 ducats; le gain du premier est la racine cubique de la part du second.

7. Trouver un nombre qui ajouté à deux fois sa racine cubique fasse 13.

8. Trouver un nombre qui ajouté à trois fois sa racine cubique fasse 15.

9. Trouver un nombre qui ajouté à quatre fois sa racine cubique fasse 17.

10. Partager 14 en deux parties dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

11. Partager 20 en deux parties dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

12. Un joaillier vend un diamant et un rubis pour 2,000 ducats; le prix du rubis est la racine cubique du prix du diamant.

15. Un juif prête un capital à cette condition qu'à la fin de l'année on lui payera pour intérêts la racine cubique du capital. A la fin de l'année, le juif a reçu 800 ducats, capital et intérêt. Quel est ce capital?

14. Partager 13 en deux parties telles, que le produit de ces deux parties soit égal au carré de la plus petite partie multipliée par elle-même.

15. Quelqu'un vend un saphir pour 500 ducats et y gagne la racine cubique de son capital.

Les quinze autres questions reviennent à partager les nombres 7, 12, 9, 25, 26, 28, 27, 29, 34, 12, 100, 140, 300, 810, 700 chacun en deux parts dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

On voit que toutes ces questions amènent à l'équation

$$x^3 + px = q.$$

Aussi Tartaglia les résolut toutes en moins de deux heures, et Fiore ne résolut aucune des trente questions posées par Tartaglia ; du moins il ne voulut pas communiquer ses solutions et ne s'en rapporter qu'au jugement de ses amis. C'était s'avouer vaincu. Tartaglia se contenta de la gloire et renonça au prix.

On ne connaît que les quatre premières des trente questions posées par Tartaglia. On les trouvera plus loin.

Tel est le récit que fait Tartaglia à Zuane di Coi (*quesito* XXV), mentionné ci-dessus, qui s'était rendu à Venise, le 10 décembre 1536, pour prier instamment Tartaglia de lui donner communication des trente questions qu'il avait proposées. Tartaglia dit qu'il n'en avait pas gardé de copie, mais qu'en allant chez le notaire et lui offrant une légère rétribution (*donate gli una gentilezza*), il en aurait une copie ; mais, en tout cas, il refuserait de donner les solutions, de crainte que ces solutions ne fassent trouver la règle. Toutefois, il lui donna les quatre premières questions.

1°. Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en la multipliant par sa racine carrée augmentée de 40, le produit soit égal à un nombre rationnel donné.

2°. Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en la multipliant par 30 moins la racine carrée de cette quantité, on obtienne un nombre rationnel donné.

3°. Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en y ajoutant quatre fois la racine cubique, on obtienne 13.

4°. Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en en soustrayant trois fois sa racine cubique, il reste 10.

Les autres questions sont restées inconnues, mais elles roulaient sur la géométrie, l'algèbre.

Zuane vit tout de suite, ce qui annonce même une certaine perspicacité, que la première question mène à l'équation

$$x^3 + mx^2 = n,$$

la deuxième à

$$m^2 x^2 = x^3 + n,$$

la troisième à

$$x^3 + mx = n,$$

la quatrième à

$$x^3 = mx + n.$$

Comme il était tard, Tartaglia l'engagea à rester avec lui à souper. Zuane lui dit qu'il était invité chez un sien cousin. Piqué de ce refus, Tartaglia lui dit : Attendez que le désir me vienne encore que vous restiez (*Aspetti quanto voglia, che voglio, che restati*).

Zuane se mit en vain l'esprit à la torture pour trouver les solutions, et il retourna le 16 décembre vers Tartaglia et renouvela ses supplications. Tartaglia lui dit que ses découvertes lui avaient coûté beaucoup de peines et qu'il ne se croyait pas tenu de les publier sans en tirer aucun honneur, aucun profit; qu'il savait d'ailleurs qu'il n'était pas licite de vouloir ensevelir totalement de telles inventions; que son intention était que, lorsqu'il aurait fini d'autres travaux (*), de tout publier. Pour montrer qu'il n'attachait pas une importance exagérée à ses découvertes, il fit cette offre à Zuane : « Pour chaque problème que vous me donnerez et avec la solution, si je n'ai pu la trouver, je vous donnerai en échange une de mes formules générales. » Zuane accepta et proposa tout de suite ces deux questions : 1° dans tout triangle rectangle la somme des deux côtés de l'angle droit est égale à l'hypoténuse plus le diamètre du cercle inscrit; 2° dans un triangle ABC on a AB = 13, BC = 14, CA = 15;

(*) Il était occupé à traduire Euclide.

sur la hauteur AD, on prend dans l'intérieur DF = 3; on mène la droite BF et on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre AC en E. Trouver les segments AE et CE (*). Tartaglia lui répond : « Tout cela est si facile, que si vous me donnez une heure de temps, je vous en donnerai la solution. A cette occasion je vous rappellerai que l'année dernière me furent apportées de votre part trois questions, dont l'une était ainsi conçue : Trois hommes ont acheté chacun une certaine quantité de livres de viande dont la somme est 20 livres; la quantité moyenne est égale au produit des extrêmes, et le produit des deux moindres quantités est 8; et, selon votre habitude, vous ne pouvez en savoir la solution puisqu'elle est impossible (**) ». Enfin vaincu par les prières et les serments, Tartaglia lui donna la solution de sa première question pour le cas particulier où le nombre rationnel est 2888, et il lui dit qu'alors la quantité irrationnelle x^2 est $78 - \sqrt{308}$; en effet, on parvient à l'équation

$$x^3 + 40x^2 = 2888$$

et

$$x = -1 + \sqrt{77}.$$

De retour à Brescia, Zuane réfléchissant sur cette solution, en trouva de semblables; ainsi il trouva pour l'équation $x^3 + 8x^2 = 72$,

$$x^2 = 14 - \sqrt{52}, \quad x = -1 + \sqrt{13},$$

et pour l'équation $x^3 + 72 = 8x^2$

$$x^2 = 14 + \sqrt{52}, \quad x = 1 + \sqrt{13}.$$

(*) Il suffit de prendre un triangle dont les trois côtés et l'aire soient rationnels; alors les hauteurs et les segments formés par ces hauteurs sur les côtés sont rationnels. Posons

$$pq = PQ;$$

les trois côtés sont $p^2 - q^2 + P^2 - Q^2$, $p^2 + q^2$, $P^2 + Q^2$.

(**) Cette question exige la résolution d'une équation du quatrième degré.

Sa solution de l'équation

$$x^2 + mx^2 = 4$$

revient à prendre

$$x^2 = 2m - 2 - \sqrt{4(2m - 2 - 1)};$$

c'est le cas particulier où l'on aurait dans l'équation $x^3 + n = mx^2$:

$$n = \pm 2m^2 \mp 8m \pm 8;$$

on part d'une forme de la racine pour trouver l'équation correspondante à cette racine (*). Enflé de cette prétendue découverte, Zuane écrit à Tartaglia, en date du 8 janvier 1537, une lettre d'une extrême insolence, déniant la primauté de ses découvertes, et dit qu'en donnant cinq sols pour chacune de ses trente réponses à del Fiore, elles auraient été très-bien payées. Tartaglia dédaigna de répondre; mais Zuane étant revenu à la charge le 17 février 1537, Tartaglia lui annonça qu'il eût à cesser toute correspondance, et que s'il veut obtenir des explications, il n'avait qu'à se rendre de sa personne à Venise.

Ici finit la première partie de la vie militante de Tartaglia. Dans la seconde partie, la plus célèbre, il eut à lutter contre un homme de science universelle, d'un génie souvent très-pénétrant, d'une extravagance souvent gigantesque, muni de beaucoup de ruse, d'astuce et de peu de conscience : tel était Cardan. Tandis que Tartaglia, enfoncé dans Euclide et Archimède, d'un caractère candide, croyant naïvement que dans les affaires du monde la ligne droite est la plus courte, devait succomber, et il a succombé.

(*) Tartaglia ne fait pas cette observation, d'où Cossali est tenté de croire qu'à la fin de 1536 il ne possédait pas encore de règle générale. Mais sans la connaissance de cette règle générale, comment aurait-il pu, en moins de deux heures, résoudre les trente questions de del Fiore?

Zuane venait de quitter Brescia pour se transporter à Milan, où il fut bien accueilli de Cardan qui lui céda même un de ses cours. Il l'entretint de Tartaglia et de son invention. Cardan, occupé de publier son *Ars magna,* et vivement excité pour le duel algébrique de Tartaglia et de del Fiore, voulait enrichir son ouvrage de la découverte de la nouvelle invention. Il chargea un libraire, Zuan Antonio de Bassano, de prier de sa part Tartaglia :

1°. De lui envoyer la résolution de l'équation

$$x^3 + px = q\,;$$

2°. De vouloir bien lui résoudre les sept questions suivantes :

1. Partager 10 en quatre parties proportionnelles dont la première soit 2.

2. Partager 10 en quatre parties proportionnelles dont la seconde soit 2.

3. Trouver quatre nombres en proportion continue dont le premier soit 2 et dont la somme du second et du quatrième fasse 10.

4. Trouver quatre nombres en proportion continue dont le premier soit 2 et dont la somme du troisième et du quatrième fasse 10.

5. Trouver six nombres en proportion continue dont le second soit 2 et dont la somme du premier et du quatrième fasse 10.

6. Partager 10 en trois nombres continuellement proportionnels et dont le produit du premier par le second fasse 16.

7. Trouver un nombre qui multiplié par sa racine carrée augmentée de 3 fasse 21.

Ces questions amènent respectivement aux équations:

1. $$2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 10.$$
2. $$2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 10x.$$
3. $$2x^3 + 2x = 10.$$
4. $$2x^3 + 2x^2 = 10.$$
5. $$2x^3 + 2 = 10x.$$
6. $$x^4 + 8x^2 + 8^2 = 10x^3.$$
7. $$x^3 + 3x^2 = 21.$$

Cardan promit d'insérer la solution du cube et de la chose égale au nombre dans son ouvrage sous le nom de Tartaglia, ou bien, si tel est son désir, de garder le secret.

C'est l'objet de la question (*quesito*) XXXI du 2 janvier 1539.

Le libraire, pour appuyer sa demande, fit ressortir la haute position médicale et géométrique de Cardan, qui faisait à Milan un cours public sur Euclide avec tant d'éclat, que le marquis del Vasto l'en avait récompensé et qu'il était maintenant sur le point de publier un bel ouvrage sur la pratique de l'arithmétique et de la géométrie. Tartaglia répond que lui-même projetait un ouvrage sur l'algèbre, et qu'il préférait publier ses découvertes dans son propre ouvrage que dans celui d'autrui; qu'il ne donnerait pas ses trente solutions, parce qu'elles serviraient, à un savant homme comme Cardan, à trouver la règle; quant aux sept questions, elles ont été évidemment dictées par da Coi, maintenant à Milan; les deux dernières sont les mêmes que celles que da Coi lui a adressées il y a une année; qu'il est impossible qu'on ait la solution à Milan, puisqu'on n'y sait pas même *le cube et la chose égale au nombre*, et les sept questions mènent à des équations (*capitoli*) beaucoup plus compliquées. Il donna au libraire copie des questions de del Fiore et renvoya pour les siennes chez le notaire.

Cardan, irrité de ce refus et de cette allégation, écrit, le 12 février 1539, une lettre dictée par le ressentiment et la colère. Il lui reproche d'être, non moins que Zuano, un présomptueux, d'avoir la folie de se croire quelque chose d'important, qu'il n'est pas au sommet de la montagne, qu'il n'est qu'au pied, dans la vallée, et autres reproches semblables. Ensuite il se résume en quatre points.

1°. Il trouve singulier que Tartaglia attribue ses sept questions à dal Coi (il le nomme Zuane Colle) : comme s'il n'y avait personne à Milan sachant en faire de semblables; lui, Cardan, le savait avant que del Colle sût compter jusqu'à 10, s'il est aussi jeune qu'il le dit.

2°. Que Tartaglia croit parler à des écoliers lorsqu'il prétend qu'une seule des trente questions d'Antonio étant résolue, les sept questions le sont également; que les trente questions se réduisent à la résolution de $x^3 + x = n$ (*) et non pas à $x^3 + mx = n$; qu'en voulant paraître merveilleux dans notre art auprès du libraire, il s'est montré ignorant auprès des connaisseurs; toutefois Cardan veut bien ne pas le croire ignorant, mais seulement présomptueux.

3°. Que Tartaglia avait dit au libraire qu'une des sept questions résolues, toutes le seraient : chose complétement fausse et injurieuse; qu'il parie 100 écus que Tartaglia n'est pas capable de réduire ses questions ni à une seule, ni à deux, ni même à trois. — Au fait, Tartaglia n'a rien dit de semblable au libraire. C'est de l'invention de Cardan pour avoir un prétexte de récriminer, ou bien le libraire n'a pas compris ce que Tartaglia lui a dit.

4°. C'est une question de balistique où Cardan et Tartaglia raisonnent d'après la physique du temps et se trompent l'un et l'autre.

(*) En style de Cardan : *La radice pronica media.*

Et il finit par lui adresser ces deux nouvelles questions :

1°. Partager 10 en quatre parties formant une proportion continue, telles que leurs carrés fassent ensemble 60; donné mais non résolu par fra Lucca (Paccioli).

2°. Deux hommes font société et chacun gagne le cube de la dixième partie de son capital.

Il déclare mettre les solutions sous cachet, et si Tartaglia ne sait pas les résoudre, on lui remettra les solutions à condition qu'il donnera une des solutions des sept questions.

Mais Tartaglia ne fut pas dupe cette fois-ci et lui dit nettement : Puisqu'il demande la solution de sa première question, c'est qu'il n'est capable d'en résoudre aucune. Il lui donne la solution de la première de ses deux dernières questions; mais, quant à la seconde, elle exige la solution de l'équation cubique et qu'il ne la donnera pas; que Cardan veut l'attraper comme font les Bohémiens (*come costumano le cingheni*).

Cependant il se montre plus libéral qu'envers del Coi, et lui indique dix des trente questions : d'abord les quatre déjà mentionnées ci-dessus, puis les suivantes :

1°. Couper une droite de longueur donnée en trois segments avec lesquels on puisse construire un triangle rectangle.

2°. Couper une pyramide tronquée en trois parties égales.

3°. Inscrire géométriquement un carré dans un triangle scalène.

4°. Un tonneau est rempli de vin pur; on en retire chaque jour deux seaux qu'on remplace par deux seaux d'eau; au bout de six jours, il y a moitié vin et moitié eau. Quelle est la contenance du tonneau?

Cardan voyant que ni les injures, ni les subterfuges ne pouvaient réussir, changea de plan, eut recours aux louanges et au mensonge. Dans une lettre du 19 mars 1539, qui commence par *Messer Nicolo mio carissimo,* il lui dit qu'il ne doit pas prendre en mauvaise part ses observations. Il rejette le tort sur dal Colle (c'est ainsi qu'il nomme ici dal Coi), qui, venu à Milan, lui a donné une idée défavorable du caractère de Tartaglia, et se plaint de l'ingratitude de ce dal Colle qui a quitté brusquement Milan, abandonnant soixante élèves qu'il lui avait procurés. Enfin il termine sa missive par inviter Tartaglia à venir à Milan le plus promptement possible. Le marquis del Vasto, Mécène très-libéral, auquel il avait remis de la part de Tartaglia deux instruments de son invention, désirait ardemment l'entretenir. — Il est probable que tout ceci n'était qu'un stratagème. Quoi qu'il en soit, après avoir hésité quelques instants, Tartaglia se rendit à Milan et accepta un logement dans la maison de Cardan. Leur entretien du 29 mars 1539 est l'objet du *quesito* XXIX. Comme le dialogue est caractéristique, nous en donnons la traduction :

Cardan. Je suis bien aise que vous soyez venu au moment où le marquis est allé à Vigevano; cela nous permettra de causer et de raisonner ensemble de nos affaires jusqu'à son retour. Certes, vous vous êtes montré de par trop peu complaisant de n'avoir pas voulu me donner la règle que vous avez trouvée sur l'équation (*il capitolo*) de la chose et du cube égal au nombre, lorsque je vous en ai si instamment prié.

Nicolo Tartaglia. Je vous dirai que j'ai fait l'avare non pas tant pour cette simple équation et pour les choses qu'elle m'a fait trouver, mais pour celles que cette équation doit faire découvrir; car c'est une clef qui ouvre la voie à l'investigation d'une infinité d'autres équations, et si je n'étais pas occupé aujourd'hui à traduire Euclide (je suis déjà arrivé au XIII^e livre), j'aurais déjà trouvé une règle générale pour beaucoup d'autres équations; mais dès que j'aurai terminé mon travail sur Euclide, j'ai dessein de composer un ouvrage de pratique, avec une nouvelle algèbre, dans laquelle je publierai non-seulement mes inventions sur les nouvelles équations, mais beaucoup d'autres que j'espère découvrir, et je veux même encore montrer le moyen d'en découvrir beaucoup d'autres, ce qui, j'espère, sera une chose très-utile, très-belle. Et ce qui fait que je refuse de la communiquer à qui que ce soit, c'est qu'en ce moment je ne puis y donner aucun soin (comme je l'ai dit, étant occupé d'Euclide). Et si je l'enseignais à quelque esprit spéculatif (comme est Votre Excellence), il pourrait facilement découvrir d'autres équations et les publier comme de son invention, ce qui gâterait complétement mon affaire. C'est là la cause qui m'a forcé d'être si impoli envers Votre Excellence: d'autant plus qu'elle est occupée à imprimer un ouvrage sur une semblable matière et qu'elle m'a écrit vouloir insérer mes inventions sous mon nom dans cet ouvrage.

Cardan. Mais je vous ai écrit aussi que si vous n'êtes pas content, je m'engage à tenir la chose secrète.

N. Tartaglia. Quant à cela, il m'a été impossible de vous croire.

Cardan. Je vous jure sur les saints Evangiles de Dieu et comme vrai homme d'honneur que si vous m'enseignez vos inventions, non-seulement je ne les publierai jamais, mais encore je les noterai pour moi en chiffres, afin qu'après ma mort personne ne puisse les comprendre. Si vous voulez maintenant me croire, croyez-le; sinon, laissons cela.

N. Tartaglia. Si je n'ajoutais pas foi à un tel serment, je mériterais certainement d'être regardé comme un homme sans foi; mais j'ai résolu d'aller à Vigevano pour trouver monsieur le marquis, parce que voilà déjà trois jours que je suis ici et que je m'ennuie d'attendre; à mon retour, je vous promets de vous découvrir tout.

CARDAN. Puisque vous allez voir monsieur le marquis, je veux vous donner une lettre (*) afin qu'il sache qui vous êtes; mais avant de partir, je veux que vous me montriez la règle que vous m'avez promise.

N. TARTAGLIA. J'y consens. Mais sachez que pour pouvoir en toute occasion imprévue me rappeler mes opérations, je les ai mises en vers; si je n'avais pas pris cette précaution, elles me seraient souvent sorties de la mémoire; et quoique ces vers ne soient pas très-bons, peu m'importe: il suffit qu'ils me servent à me rappeler la règle chaque fois que j'en ai besoin. Je veux vous en donner une copie par écrit, afin que vous soyez bien sûr que je vous ai bien donné mon invention telle qu'elle est.

1. *Quando che'l cubo con le cose appresso,*
Se aggaglia a qualche numero discreto,
Trovati dui altri differenti in esso.

2. *Dapoi terrai questo per consueto*
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose netto.

3. *El residuo poi suo generale*
Delli lor lati cubi ben sottrati
Vorra la tua cosa principali.

4. *In el secundo de cotesti alti,*
Quando che'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai quest'altri contratti.

5. *Del numer farai due, tal part'a valo*
Che l'uno e l'altru si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stelo.

6. *Delle qual poi, per commun precetto,*

(*) Cela montre bien que le desir du marquis de voir Tartaglia est une pure invention de Cardan.

Torrai li lati cubi insieme gionti,
Et cotal somma sarà il tuo concetto.

7. *El terzo poi de questi nostri conti*
Se solve con secondo, se ben guardi
Che ser natura son quasi congionti.

8. *Questi trovai, et non con passi tardi*
Nel mille cinquencente quatro et trenta
Con fundamenti ben saldi e gagliardi,
Nel città dal mar intorno centa.

Nous allons essayer une traduction avec l'explication qui la rende intelligible.

1. Quand le cube joint avec les choses,
Égalent quelque nombre donné,
Trouve deux autres dont la différence tienne lieu du nombre.

Explication. Soit

$$x^3 + px = q,$$

posons

$$t - u = q.$$

2. Après tu feras, selon l'usage,
Que leur produit soit toujours égal
Au cube du tiers des choses.

Explication. Pose

$$ut = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 = \frac{1}{27}p^3.$$

3. Ensuite le résidu général
Des côtés de leurs cubes
Donnera ton inconnue principale.

Explication.

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u},$$

t et u sont inconnues auxiliaires, x est l'inconnue principale.

4. Dans la seconde de ces opérations,
Lorsque le cube reste seul,
Tu observeras ces autres préceptes.

Explication. Lorsque $x^3 = px + q$.

5. Du nombre, fais deux parts de manière
Que l'un et l'autre produisent exactement
Le cube du tiers de la chose.

Explication.

$$t + u = q, \quad tu = \left(\frac{1}{3}p\right)^3.$$

6. Ensuite par un précepte connu
Tu mettras ensemble les côtés des cubes
Et cette somme sera ce que tu cherches.

Explication.

$$x = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}.$$

7. Puis la troisième de ces opérations
Se résout par la seconde, si tu remarques bien
Qu'elles sont quasi conjointes par leur nature.

Explication.

$$x^3 + q = px;$$

elle se déduit de la seconde $x^3 = px + q$ en prenant q négativement.

8. J'ai trouvé ces choses, non à pas tardif,
En mil cinq cent trente-quatre,
Sur des fondements solides et vigoureux,
Dans la cité entourée de la mer.

Cela est si clair, que, sans autre exemple, je crois que Votre Excellence comprendra le tout.

CARDAN. Je l'ai quasi compris jusqu'à présent; partez, et, lors de votre retour, je vous ferai voir si je l'ai compris.

N. TARTAGLIA. Maintenant qne Votre Excellence s'applique à ne pas manquer à la foi promise, car si, par malheur, Votre Excellence manquait de foi envers moi, soit en imprimant dans votre ouvrage, soit autrement, même en y mettant mon nom et me proclamant l'inventeur, je vous promets et vous jure que jê ferai imprimer immédiatement après quelque chose qui ne vous sera pas très-agréable.

CARDAN. Ne doutez pas que je ne tienne ce que je vous ai promis. Allez et soyez tranquille. Donnez cette lettre de ma part au marquis.

N. TARTAGLIA. Je me recommande.

CARDAN. Bon voyage.

N. TARTAGLIA (*à part*). Par ma foi! je n'irai pas à Vigevano, mais je veux retourner tout de suite à Venise, advienne que pourra.

Ici se termine le *quesito* XXXIV.

9 avril. Dans le *quesito* suivant, Cardan lui témoigne sa surprise de ce qu'il a subitement quitté Milan sans voir le marquis, seigneur si généreux et qui était revenu pour le Samedi Saint; lui annonce que son ouvrage, presque terminé, paraîtra la semaine prochaine; et il finit par cette prière : « J'ai trop présumé de mes forces: je ne comprends pas entièrement votre règle et vous prie de m'envoyer la solution de cette équation $x^3 + 3x = 10$. » A cela Tartaglia répond, le 23 avril, qu'il avait promis à ses amis d'être sans faute de retour à Venise pour le Samedi Saint, et que Cardan s'est trompé sur le sens du dernier vers du second tercet en posant

$$ut = \frac{1}{3}p^3,$$

tandis qu'il faut poser

$$ut = \left(\frac{1}{3}p\right)^3,$$

alors

$$t = \sqrt{26} + 5 \quad \text{et} \quad u = \sqrt{26} - 5,$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}} - \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}}.$$

Il résout de même l'équation

$$x^3 + x = 11,$$

mais ne fait aucune mention de la multiplicité des racines.

12 mars. Cardan lui envoie son premier ouvrage d'algèbre avec prière de ne pas trop le répandre pour ne pas nuire au libraire, et renouvelle sa promesse de ne pas parler des découvertes de Tartaglia.

27 mars. Réponse de Tartaglia qui s'excuse sur ses occupations et sur une indisposition de n'avoir pu que jeter les yeux sur l'ouvrage de Cardan et y signale pourtant une grosse erreur sur une règle pour extraire la racine cubique par approximation. Cardan pose

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2}.$$

10 juillet. *Quesito* XXXVII. Maphio Paviciani, un disciple de Tartaglia, résidant à Bergame, lui écrit qu'un de ses amis de Milan lui annonce que le médecin Cardan avait publié un second ouvrage d'algèbre où il a parlé de nouvelles équations qui ne sont probablement pas autres que celles de Tartaglia.

19 juillet. Tartaglia répond qu'en effet ces équations nouvelles ne peuvent être autres que les siennes; qu'il en est extrêmement contrarié, et que le proverbe ne ment pas qui dit : *Quello che tu non voi che si sappia, nel dire ad alcuno.* (Ce que tu ne veux pas que l'on sache, ne le dis à personne.)

4 août. *Quesito* XXXVIII. Cardan se plaint de ce que Tartaglia a laissé sans réponse plusieurs de ses questions; qu'il comprend bien la règle, mais qu'il ne sait plus s'en tirer lorsque le cube du tiers de la chose surpasse le carré de la moitié du nombre, et lui demande la résolution de

l'équation

$$x^3 = 9x + 10.$$

C'est ce qui est devenu si célèbre sous le nom de *cas irréductible*. La racine — 2 se présente sous une apparence irrationnelle. Quant à l'extraction de la racine cubique par approximation (*voir* ci-dessus), il y a dans son ouvrage d'autres règles pour cela et qui sont très-exactes.

7 août. Tartaglia ne pouvant résoudre la difficulté et déjà irrité, fait une réponse assez impertinente; veut faire accroire à Cardan qu'il applique mal la règle et lui dit que ses secondes règles d'approximation ne valent pas mieux que la première.

18 octobre. Cardan écrit : Tartaglia a-t-il perdu l'esprit, peut-être à force d'étudier et de lire? que lui est sûr de bien comprendre la règle; il veut parier 100 écus contre 25 qu'il sait résoudre l'équation

$$x^3 = 12x + 20.$$

Tartaglia ne veut plus répondre.

5 janvier 1540. *Quesito* XL. Cardan avertit *fraternellement* (*quanto fratello*) Tartaglia que ce diable de Zuane dal Colle (*quel diavolo de messer Zuane Colle*) vient encore d'arriver à Milan, ayant appris que je voulais lui céder un de mes cours, celui d'Arithmétique; se croyant un homme fort, je l'ai examiné et ne le trouve pas ce qu'il croit être; je vous avertis qu'il possède votre équation de la chose et du cube égal au nombre et celle de la chose et du nombre égal au cube, et se vante que, lors de son séjour à Venise, il est entré en discussion avec del Fiore, et, par cette voie, il est parvenu à ce qu'il cherchait; la discussion lui a fait connaître la nature de l'équation, et, après diverses conjectures, aidé d'un de ses compagnons, il a trouvé la solution. Sachez qu'il a encore trouvé la racine cubique de $10 + \sqrt{108}$; elle est égale à

$1+\sqrt{3}$; et aussi

$$\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}=\sqrt{3}-1,$$

et de là

$$\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}-\sqrt[2]{10-\sqrt{108}}=2.$$

Je vous engage à chercher la règle, je n'ai pas pu la trouver. Je vous avertis encore qu'il a la solution de la question que j'ai faite de partager 10 en trois nombres formant une proportion continue et tels, que le produit du premier par le second fasse 8, et qu'il m'enseignera sa solution si je lui cède mon cours. Ainsi veuillez la chercher; j'avoue ne pouvoir la trouver, pas plus que la suivante que Zuane ne sait pas non plus : Trouver trois nombres en proportion continue tels, que la somme du premier et du troisième fasse 10 et que le produit du premier et du second fasse 7. Il dit avoir aussi la démonstration que le cercle contient une aire maxima entre toutes les figures de même contour; que cette proposition, qui se trouve peut-être dans Proclus ou dans Théon, lui a été enseignée par messer Philène, de Bologne. Il propose encore ce problème : Soit donné le rectangle ABCG et soit encore donné le centre D du rectangle; trouver sur le prolongement de AB un point F et sur le prolongement de AC un point E tels, que les trois points E,F, G soient en ligne droite et que DE soit égal à DF. Si l'on prend

$$AB=2,\quad BC=3,$$

quelle est la valeur de DE?

Cette lettre est suivie des observations de Tartaglia. « Je trouve, dit-il, que Cardan a un esprit plus obtus que je ne croyais. Zuane n'est pas venu pour qu'il lui cède son cours, mais pour le lui enlever. Cardan en a peur. Aussi Zuane lui en donne à garder lorsqu'il dit posséder la solution des équations (*capitoli*). L'extraction de la racine cubique de $10 + \sqrt{108}$ ne présente pas de difficulté : il suffit de décomposer 10 en deux nombres dont l'un soit un cube et l'autre divisible par 3, et on trouve de même le *résidu* (*). »

Il découvre encore d'autres traces de simplicité dans la conduite de Cardan, et ses observations se terminent ainsi :

Et per questo non li voglio dar altra risposta per che è non vi ho piu affectione à lui che à messer Zuane, e pero li voglio lassar far tra loro; ma me la vedo che lui e perso d'animo, non so mo comme l'andera.

« C'est pour cela que je ne veux plus lui faire d'autre réponse, parce que je n'ai pas plus d'affection pour lui que pour messer Zuane ; je veux les laisser faire entre eux, mais je vois qu'il a perdu l'esprit et ne sais maintenant comment cela ira.

Depuis, toute correspondance cesse avec Cardan. Le pauvre Tartaglia croit que Cardan est la dupe de Zuane et il ne soupçonne pas d'être lui-même dupe de Cardan, qui fait intervenir ce Zuane pour se ménager un prétexte de dégager sa parole et d'être impunément parjure.

1541. Le *quesito* XLII a encore rapport à l'équation cubique. C'est un dialogue entre Tartaglia et un gentilhomme anglais nommé Ricardo Ventuorthe, son disciple et son ami (*compare*).

Tartaglia refuse de lui donner ses règles ; mais, après qu'il aura fini son travail sur Euclide et Archimède, il publiera un ouvrage qu'il dédiera à ce gentilhomme (**) et où toutes les règles seront développées et démontrées ; le

(*) Euclide nomme *binôme* les expressions $a + \sqrt{b}$ et *apotome* (segment) les expressions $a - \sqrt{b}$; de là en latin *recisus* et en italien *reciso;* c'est le *résidu* de Tartaglia.

(**) La première partie du *General Trattato* est en effet dédiée à ce gentilhomme, dont il vante les bienfaits qu'il en a reçus.

disciple consent d'attendre, mais demande au moins quelques exemples ; Tartaglia donne les suivants :

$$x^3+6x^2=100,\quad x=\sqrt[3]{42+\sqrt{1700}}+\sqrt[3]{42-\sqrt{1700}},$$
$$x^3+9x^2=100,\quad x=-2+\sqrt{24},$$
$$x^3+3x^2=2,\quad x=-1+\sqrt{3},$$
$$x^3+7x^2=50,\quad x=-1+\sqrt{11}.$$

C'est pour avoir trouvé le premier exemple d'une vérification trop pénible, qu'il a donné les trois autres ; et le gentilhomme ayant demandé un exemple de la forme

$$x^3+n=mx^2,$$

il lui donne

$$x^3+4=5x^2,\quad x=2+\sqrt{8},$$
$$x^3+6=7x^2,\quad x=3+\sqrt{15}.$$

Ventuorthe se montre satisfait et pense pouvoir, d'après ces solutions, trouver lui-même la règle. Tartaglia le dissuade de s'appliquer à de telles recherches qui sont très-fatigantes et sans résultats : on ne peut rien trouver par la voie des essais. Ces équations ont chacune deux solutions diverses et peut-être davantage, chaque solution nécessitera d'autres essais. Il l'exhorte à attendre patiemment la publication de son ouvrage. A cela, Ventuorthe dit qu'il est dur de croire que la même équation puisse avoir deux solutions et peut-être davantage. A cela Tartaglia répond :

Là è certo cosa dura a credere, et certamente se la sperientia non me ne facesse testimonianza, quesi che non il crederei.

« Certes la chose est dure à croire, et certainement si l'expérience n'en rendait témoignage, je ne le croirais presque pas. »

Il donne pour exemple l'équation

$$x^3+3x=14,$$

où l'on a évidemment $x = 2$ et cependant la règle donne

$$x = \sqrt[3]{7 + 41} - \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}},$$

solution différente de 2. Ici Tartaglia commet une erreur de calcul; il faut d'après sa règle

$$x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}},$$

et s'il s'était rappelé la règle donnée ci-dessus, il aurait trouvé

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = 1 + \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 1 - \sqrt{2},$$

d'où

$$x = 2;$$

les deux autrés racines sont

$$x = -1 \pm \sqrt{-6}.$$

Tartaglia ne mentionne nullement les racines imaginaires. Il paraît qu'il ne savait pas s'en rendre raison; en général, il n'avait pas une idée nette de la multiplicité des racines; mais il fait ici une observation importante : Il dit à son disciple que dans son ouvrage il fera voir que toutes les solutions des équations cubiques se ramènent à la solution des trois formes

$$x^3 + px = q, \quad x^3 + q = px, \quad x^3 = px + q,$$

généralisation qui indique un grand progrès analytique.

Tartaglia raconte encore dans le même *quesito* que dans la nuit de la Saint-Martin de 1536 qui était un samedi, étant au lit sans pouvoir dormir, il avait trouvé des règles pour

$$x^6 + fx^3 = 6, \quad x^6 = fx^3 + g, \quad x^6 + g = fx^3.$$

Il en indique les solutions à son disciple qui prend congé en promettant de lui écrire dès son retour en Angleterre, et Tartaglia lui dit :

Andati, messer compare, che Iddio va dia il buon *viaggo et vi prego che me scriveti subito, che vi seti aggiunto, come haveti detto.*

« Allez, mon cher ami, que Dieu vous donne un bon voyage; et je vous prie de m'écrire dès que vous serez arrivé, comme vous l'avez promis. »

Le disciple répond : *Faro senza fallo.* (Je le ferai sans faute.)

Ce sont les derniers mots des *quesiti.* Nous voyons que Tartaglia avait l'affection de ses élèves; c'est qu'il était lui-même très-affectueux.

Tartaglia, absorbé par sa traduction d'Euclide et par les corrections d'erreurs commises par les traducteurs d'Archimède, ne s'occupait des équations cubiques que de temps à autre, tandis que Cardan, aidé de son excellent élève Louis Ferraris (*voir* t. XI, p. 120), s'en occupant sans cesse, parvint à donner de l'extension aux règles de Tartaglia, à résoudre les équations du quatrième degré et à donner des éclaircissements sur la nature des équations. Il réunit toutes ces règles et ces connaissances nouvelles en une théorie qu'il publia en 1545 sous le titre : *Ars magna;* il y joignit le livre *Regula aliza* (*) où il donne le cas irréductible. Le serment de foi prêté fut violé, et ce qui devait être écrit en chiffres ponr être inintelligible après sa mort fut divulgué au monde entier par des milliers d'exemplaires imprimés. Non-seulement, il manqua de foi, mais même il ne fut pas entièrement juste envers Tartaglia. Il prétend qu'après d'instantes prières, il n'en avait reçu que la solution du cube et de la chose égale au nombre; tandis que par les tercets rapportés ci-dessus il avait encore reçu les deux autres formes. Indigné d'une telle félonie, Tartaglia eut à soutenir, en 1547, une der-

(*) Cardan ne donne pas l'explication de ce mot.

nière lutte où pourtant il ne fut pas le provocateur. Voici comment il raconte ce fait dans son *General Trattato, etc.*, II^e partie, II^e livre, chapitre VII, § 7, imprimé en 1556.

« En 1547, Cardan et sa créature, Ludovic Ferraro, dans deux bulletins imprimés, me portèrent un défi. Je leur adressai trente et une questions, à condition qu'elles seraient résolues en quinze jours; passé ce délai, les solutions devaient être considérées comme non avenues. Ils restèrent deux mois sans donner signe d'existence, et puis ils m'envoyèrent trente et une questions sans me donner la solution d'aucune des miennes; d'ailleurs le terme fatal était dépassé de plus de quarante cinq jours. Je trouvai le jour même les solutions de dix, le lendemain de quelques autres, puis de toutes les autres, et, afin de ne pas dépasser l'intervalle de quinze jours, je me hâtai de les faire imprimer et de les envoyer à Milan. Pour cacher leur lenteur à répondre à mes questions ou du moins à quelques-unes, ils m'entretinrent d'autres choses pleines de longues sottises, et ce n'est qu'au bout de sept mois qu'ils m'envoyèrent une réponse publique, où ils se vantaient d'avoir résolu mes questions. D'abord, si même tout cela était vrai, ces solutions données si longtemps après le terme fixé n'étaient d'aucun mérite; ensuite la plus grande partie d'entre elles étaient complétement fausses. Désirant proclamer publiquement ces faussetés et me trouvant à Brescia, dans le voisinage de Milan, je m'y rendis et envoyai à tous les deux un cartel imprimé où je les invitais à se trouver vendredi prochain, 10 août 1548, à 10 heures, à l'église surnommée le jardin dit des Frères Zoccolanti, pour discuter publiquement mes réfutations de leurs prétendues solutions. Cardan, pour ne pas se trouver à l'examen, s'éloigna précipitamment de Milan, et, au jour fixé, Ferraro vint seul au rendez-vous, et accompagné d'une foule d'amis et de plusieurs autres ; j'étais seul avec mon frère que j'avais amené avec moi de Brescia. Je me présentai en présence de toute cette multitude et commençai par exposer brièvement le sujet de la discussion et la cause de mon arrivée à Milan. Lorsque je voulus en venir aux réfutations des solutions, on m'interrompit pendant deux heures par des paroles et des gestes, sous prétexte qu'on devait choisir, en l'endroit même, un certain nombre de juges parmi les auditeurs présents , tous amis de Ferraro et à moi entièrement inconnus. Je ne voulus pas consentir à cette astuce, et dis que mon intention était que tous les auditeurs fussent juges , de même que ceux qui liront mes réfutations lorsqu'elles seront imprimées. Enfin ils me laissèrent parler, et, pour ne pas ennuyer l'auditoire, je commençai, non par des objets fastidieux sur les nombres et la géométrie, mais il me parut convenable de réfuter la solution d'une question sur le chapitre XXIV de la Géographie de Ptolémée, et je contraignis Ferraro à convenir publiquement qu'il s'était trompé. Voulant continuer, tous se mirent à crier que je devais maintenant parler de mes propres solutions obtenues en trois jours, des trente et une questions qui me furent proposées. J'eus beau objecter qu'on devait d'abord me laisser achever ce qui concernait mes réfutations, qu'ensuite j'aborderais ce qu'ils demandaient : ni raisonnements ni plaintes ne furent écoutés ; on ne me laissa plus parler, et on donna la parole à Ferraro, qui commença par dire que je n'ai pu résoudre la quatrième question sur Vitruve, et il s'étendit là-dessus jusqu'à l'heure du souper. Chacun vida le temple et s'en alla à la maison. »

Ainsi se termina ce duel, original même en ces temps.

Tartaglia s'éloigna tout de suite de Milan, et, craignant des violences, regagna Brescia par un chemin détourné.

Dans le *Trattato general*, III^e partie, livre III, on lit vingt-deux des trente questions de Cardan, avec leurs solutions données par Tartaglia; il dit avoir des raisons pour ne pas envoyer à Cardan les solutions des huit autres. On y lit aussi les trente et une questions proposées par Tartaglia; la solution de la trente et unième et dernière question est la seule qui soit exacte. Il s'agit de trouver la valeur de x dans l'équation

$$27x^9 + 36x^5 + 54x^7 + 8x^3 = 1000,$$

ils extraient la racine cubique et trouvent $3x^3 + 2x = 10$, équation cubique, et Tartaglia ne manque pas de faire observer que c'est à lui qu'ils doivent cette solution.

Voici ce qui a occasionné le terrible échec de Cardan et de Ferrari : Les quinze livres d'Euclide renferment cinq cent quatorze propositions tant géométriques qu'arithmétiques. Ce nombre comprend cent cinq problèmes dont quatre-vingt-dix-huit sont géométriques; il y en a soixante-quinze sur un plan et vingt-trois dans l'espace. Or Tartaglia était parvenu à résoudre soixante-sept des problèmes plans à l'aide de la règle et d'une ouverture de compas invariable, et à démontrer l'impossibilité de construire ainsi les huit restants. Cardan, portant son défi, croyait que Tartaglia ne possédait que la règle du cube, et ne se doutait pas qu'il avait encore d'autres armes; la plupart de ses questions roulent sur cette méthode particulière de solution, à eux inconnue Aussi furent-ils pris au dépourvu et honteusement vaincus: juste punition d'une trahison, utile, il faut en convenir, à la science; mais toutes les fois qu'une mauvaise action a de bons résultats, il faut en remercier la Providence et nullement l'auteur, qui reste toujours flétri. Tartaglia, sans avoir jamais manqué à l'honneur, n'est pas irréprochable. Sa découverte de 1530 n'est pas encore publiée par lui-même en 1556. Il la tenait en réserve, comme il a été dit, pour son grand ouvrage *General Trattato,* divisé en six parties; or il est mort en 1556 pendant l'impression de la cinquième partie. La sixième partie, consacrée à l'algèbre, devait renfermer les règles pour la résolution de l'équation cubique. Curtio Trajano, libraire, qui a fait imprimer à Venise les cinq premières parties, chargea un savant mathématicien (*un dotto matematico*) de réunir et de mettre en ordre tous les manuscrits laissés par Tartaglia pour cette dernière partie. Or on n'a jamais imprimé que le premier livre de cette sixième partie, où l'on ne trouve que les règles pour les opérations algébriques et rien sur l'équation cubique. Le libraire a-t-il refusé les fonds pour imprimer le reste, ou le mathématicien s'est-il mal acquitté de sa besogne? Ce qui est certain, c'est que sans les traîtreuses révélations de Cardan, on serait resté encore longtemps sans savoir résoudre les équations cubiques, et, par conséquent aussi, les équations biquadratiques. En mathématiques, il ne faut, sous aucun prétexte, différer longtemps. Car ce que l'un découvre au Nord, un autre le découvrira au Midi, et, comme dit très-bien Arago, la priorité appartient à celui qui *publie* le premier; et dussiez-vous prouver invinciblement que vous avez eu la même idée il y a vingt ans, la réclamation est de nulle valeur, votre droit est périmé. Ce qui est arrivé à Tartaglia, et depuis à Newton pour le calcul infinitésimal, sont des enseignements que nos grands géomètres ne devraient pas oublier et qu'ils oublient toujours.

THÉORÈMES DE PASCAL ET DE BRIANCHON.

Dans l'ouvrage sur les *Méthodes en Géométrie* de M. P. Serret, on lit, page 19, une démonstration très-simple de ces deux théorèmes. Le savant auteur a trouvé depuis que de semblables démonstrations ont déjà été données par Dandelin dans les *Annales* de Gergonne (tome XVI).

Les observations de M. Serret sur la Note de M. Rouché relative au théorème de Legendre (*voir* page 354) seront insérées en 1857.

BIBLIOGRAPHIE.

Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal; par M. *F. Frenet*, ancien élève de l'Ecole Normale, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. Ouvrage destiné aux élèves de l'Ecole Polytechnique, à ceux de l'Ecole Normale et aux auditeurs des cours de Mathématiques dans les Facultés des Sciences. Paris, 1856; in-8 de 220 pages, 2 planches lithographiées, chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 5 francs.

Nous nous empressons de dire que cet ouvrage important, dont nous rendrons compte, remplit son but. Les exemples sont puisés aux sources classiques; questions et solutions sont nettement rédigées, simplement résolues. En y joignant les excellents *Exercices de mécanique* de

M. l'abbé Jullien (*), les personnes qui se livrent aux hautes études auront un vade-mecum qu'on ne saurait trop leur recommander. Dans l'édifice mathématique, on ne connaît bien un étage qu'en habitant l'étage supérieur. C'est ce qu'on verra encore dans les exercices que M. Catalan va publier pour les classes des lycées.

FIBONACCI.

M. Baldassare Boncompagni vient de publier une seconde édition des *Opuscoli* du célèbre Pisan. (Firenze, 1856).

Nous avons parlé longuement (p. 1) de cette production qui fait époque dans l'histoire de la science et qui a attiré l'attention d'éminents géomètres. MM. A. Genocchi et Lebesgue avaient signalé quelques erreurs de copie et indiqué des corrections. Dans cette seconde édition, les erreurs ont disparu et l'on a admis les corrections. On a ajouté six nouvelles notes qui ne se trouvaient pas dans la première édition, et trois notes anciennes sont modifiées. De sorte que cette seconde édition est un nouveau service, un nouveau témoignage de la conscience scrupuleuse que le savant auteur met dans tous ses érudits travaux.

(*) 2 volumes in-8 chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 12 fr.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME II.)

Historique.

Bibliographie.

Biographie.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

ERRATUM.

Page 135, ligne 1 en rem., *au lieu de* 10,000 fr., *lisez* 100,000 fr.

FIN DU TOME II.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.