NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DIEU

Concours d'agrégation aux lycées, année 1848

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 72-81
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__72_0>

CONCOURS D'AGREGATION AUX LYCÉES, ANNEE 1848;

PAR M. DIEU,
Agrége, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Un cylindre droit à bases circulaires, de matière hétérogène, mais dont tous les points situés sur une même droite parallèle à l'axe ont la même densité, est posé sur un plan horizontal. Déterminer le mouvement qu'il prend sous l'action de la pesanteur, et en particulier le mouvement du centre de gravité, ainsi que celui d'un point quelconque du rayon qui passe par ce centre. On fera abstraction du frottement.

I. Lorsqu'un cylindre droit quelconque, posé par une arête sur un plan horizontal sans frottement, de manière que son centre de gravité ne soit pas dans le plan vertical de l'arête de contact, est abandonné sans vitesse à l'action de la pesanteur, les arètes ne doivent pas changer de direction pendant le mouvement qu'il prend, et les bases doivent rester toujours dans les plans verticaux où elles se trouvent d'abord; car les forces qui donneraient à chaque instant à ce corps supposé libre le mouvement qu'il a dans son état réel, savoir : son poids et la résistance du plan d'appui suivant l'arête de contact, sont des forces verticales qui ne peuvent conséquemment ni faire tourner autour d'un axe vertical, ni faire glisser dans la direction horizontale des arêtes.

Quand le cylindre est formé de *filets* homogènes parallèles aux arêtes, son mouvement ne dépend pas de sa hauteur, ou, en d'autres termes, un tronçon compris entre deux plans perpendiculaires aux arêtes, s'il était détaché du reste, prendrait d'abord et aurait continuellement ensuite un mouvement identique à celui qu'il a dans son état réel. En effet, si le cylindre, au moment où on le pose sur le plan, était coupé en un nombre quelconque de tronçons égaux par des plans perpendiculaires aux arêtes, et si ces tronçons étaient sans action les uns sur les autres, il est clair qu'ils prendraient tous le même mouvement; or la juxtaposition des parties ne saurait altérer ce mouvement commun, car elle ne peut produire ou amener aucun frottement, et il ne sera pas altéré davantage par la liaison complète qui reconstitue le cylindre.

D'après cela, il suffit pour résoudre le problème proposé de considérer un tronçon détaché du cylindre par deux plans perpendiculaires aux arêtes; nous pourrons supposer ce tronçon infiniment mince et le regarder comme un cercle composé de points matériels inégalement pesants, puisque le cylindre dont il s'agit est de révolution; enfin nous pourrons prendre la section circulaire contenant le centre de gravité G du cylindre, qui est équidistante de ses bases, et dont le point G sera aussi le centre de gravité.

II. Soient, à la fin du temps t écoulé depuis que le mouvement a commencé,

C la position de centre du cercle qui touche alors en A le plan horizontal;

M un des points matériels dont il se compose;

f la force variable, dirigée suivant AC, qui représente la résistance du plan:

et, par rapport à la trace invariable du plan du cercle sur le plan horizontal et à un axe vertical, pris pour axes des x et des y d'origine O, soient

x' l'abscisse des points A et C (l'ordonnée de C est toujours égale au rayon);

x_1, y_1 les coordonnées de G;

x, y celles de M. (Ces deux dernières varient avec le temps comme les précédentes, de plus avec la position de M dans le cercle.)

Nous désignerons en outre par a le rayon du cercle, par m sa masse et par μ celle du point matériel M.

En appliquant au cercle la force f, on peut le considérer comme libre et l'on a les équations

$$(1) \qquad \Sigma.\mu.\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$(2) \qquad f - mg - \Sigma.\mu\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$(3) \qquad x'f - mgx_1 + \Sigma.\mu\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$

qui expriment l'équilibre des forces perdues. (g représente la gravité et le signe Σ indique une somme qui s'étend à tous les points du cercle.)

On déduit immédiatement de l'équation (1) que $x_1 = \alpha$, α étant une constante, car $\frac{dx}{dt}$ est nulle pour $t = 0$.

Donc *le centre de gravité du cylindre ne quittera pas la verticale sur laquelle il se trouve d'abord, et ne pourra que s'élever ou s'abaisser sur cette droite.*

L'élimination de f entre les équations (2) et (3) donne

$$(4) \quad mg(x' - \alpha) + x'.\Sigma.\mu\frac{d^2y}{dt^2} + \Sigma.\mu\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$

en remplaçant x_1 par α.

Soient encore :

r et θ les coordonnées polaires du point quelconque M du cercle par rapport à l'axe vertical CA et au point C pris pour pôle (θ est positif en tournant autour de C dans le même sens que de Ox vers Oy autour du point O);

r_1 et θ_1 les coordonnées polaires du centre de gravité G.

r_1 est constant, r ne varie qu'avec la position de M dans le cercle, θ_1 qu'avec le temps, et θ varie des deux manières.

On a évidemment

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha - r_1 \sin \theta_1, \\ x = \alpha - r_1 \sin \theta_1 + r \sin \theta, \\ \text{et } y = a - r \cos \theta. \end{array} \right.$$

Substituant ces valeurs de x', x et y dans l'équation (4), en ayant égard à ce que

$$\Sigma . \mu r \cos \theta = m r_1 \cos \theta_1 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d^2 \theta_1}{dt^2},$$

ainsi qu'au mode de variation de r, θ et θ_1, et mettant $m(k^2 + r_1^2)$ au lieu de $\Sigma . \mu r^2$ (moment d'inertie du cercle par rapport à son centre), il vient, toutes réductions faites,

$$(6) \quad (k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1) \cdot \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + r_1^2 \sin \theta_1 . \cos \theta_1 \cdot \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + g r_1 \sin \theta_1 = 0.$$

Cette équation est susceptible d'abaissement, car elle ne contient pas t d'une manière implicite; pour arriver tout de suite à une équation linéaire du premier ordre, il suffit de poser

$$\frac{d\theta_1}{dt} = (2\zeta)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = \frac{d\zeta}{d\theta_1}.$$

En substituant dans l'équation (6), on trouve

$$(7) \quad \frac{d\zeta}{d\theta_1} + \frac{2 r_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1} \cdot \zeta + \frac{g r_1 \sin \theta_1}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1} = 0.$$

L'intégrale de cette équation s'obtient par un calcul connu : c'est

$$\zeta = \frac{C_1 + g r_1 \cos \theta_1}{k_2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1};$$

et, en déterminant l'arbitraire C_1 de manière à ce que, pour $t = 0$, $\theta_1 = \theta_0$ et $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$ (θ_0 est la valeur initiale donnée de θ_1), on arrive à

$$(8) \qquad \frac{d\theta_1}{dt} = \mp \sqrt{2gr_1} \cdot \sqrt{\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2\theta_1}}.$$

La forme de cette équation montre l'impossibilité d'exprimer t en fonction de θ_1 autrement que par une série ou une intégrale définie, et d'avoir θ_1 en fonction de t; mais cela ne serait nécessaire que pour assigner à chaque instant la position du cylindre, et, comme on va le voir, la discussion de quelques-unes des équations précédentes, ainsi que de

$$(9) \qquad y_1 = a - r_1 \cos\theta_1,$$

achève de faire connaître toutes les circonstances du mouvement.

III. Il faut remarquer d'abord que si θ_1 ne restait pas entre θ_0 et $-\theta_0$, l'expression (8) de $\frac{d\theta_1}{dt}$ deviendrait imaginaire, ce qui ne doit pas arriver; qu'ainsi, en supposant $\pi > \theta_0 > 0$, on doit prendre premièrement le signe — devant le radical, dans le second membre de l'équation (8), afin que $d\theta_1$ soit négative jusqu'à ce qu'on ait $\theta_1 = -\theta_0$, puis le signe +, afin que $d\theta_1$ soit positive jusqu'à ce qu'on soit revenu à $\theta_1 = \theta$, et ainsi de suite alternativement. Cela posé :

1°. D'après l'équation (8), la vitesse angulaire relative du cercle autour de son centre C, représenté par le second membre de cette équation, est *maxima* (abstraction faite du signe) et égale à $2\frac{\sqrt{gr_1}}{k} \cdot \sin\frac{\theta_0}{2}$ pour $\theta_1 = 0$, *minima* et nulle pour $\theta_1 = \pm\theta_0$, et cette vitesse est la même, sauf le sens, pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. Donc

Abstraction faite du mouvement de l'axe du cylindre, ce corps oscille autour de cette droite entre deux positions symétriques par rapport au plan vertical qui la contient; les oscillations sont isochrones et se composent chacune de deux parties égales.

L'amplitude de ces oscillations est $2\theta_0$, et leur durée T sera donnée par la formule

$$T = 2\sqrt{2gr_1}\cdot\int_0^{\theta_0} d\theta\cdot\sqrt{\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta}}.$$

2°. La plus petite et la plus grande valeur de x' que donne la première des équations (5) sont $\alpha - r_1\sin\theta_0$ et $\alpha + r_1\sin\theta_0$ qui répondent à $\theta_1 = \pm\theta_0$, et cette équation fournit des valeurs de x' équidifférentes de α pour celles de θ_1 qui sont équidifférentes de zéro. En outre, on déduit de la même équation et de l'équation (8)

$$\frac{dx'}{dt} = \pm r_1\sqrt{2gr_1}\,.\cos\theta_1\cdot\sqrt{\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1}},$$

ce qui montre que *la vitesse du centre* C *sur la droite* y = a *est toujours égale à la vitesse angulaire relative autour de ce centre, multipliée par la projection de* CG *sur la verticale* Oy; ainsi $\frac{dx'}{dt}$ est nulle pour $\theta_1 = \pm\theta_0$, atteint (abstraction faite du signe) son *maxima*

$$2r\frac{\sqrt{gr_1}}{k}\cdot\sin\frac{\theta_0}{2}$$

pour $\theta_1 = 0$, et prend des valeurs absolues égales pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. Donc

L'axe du cylindre oscille parallèlement à sa première position (I), *dans le plan horizontal où il doit toujours* *rester entre cette position et une autre située à la distance* $2r_1 \sin\theta_0$ *de celles-là; ces oscillations coïncident avec les précédentes, ont même durée et sont aussi formées de deux parties égales.*

3°. D'après l'équation (9), les valeurs extrêmes de y_1 sont $\alpha - r_1 \cos\theta_0$ et $\alpha - r_1$ qui répondent à $\theta_1 = \pm\,\theta_0$ et $\theta_1 = 0$, et y_1 prend des valeurs égales pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. De plus, cette équation et l'équation (8) donnent

$$\frac{dy_1}{dt} = \mp\, r_1 \sqrt{2gr_1}\,.\sin\theta_1 \cdot \sqrt{\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2\theta_1}},$$

d'où il suit que $\frac{dy_1}{dt}$ est nulle pour $\theta_1 = \pm\,\theta_0$ et $\theta_1 = 0$, nécessairement *maxima* (abstraction faite du signe) pour de certaines valeurs de θ_1 entre 0 et $\pm\,\theta_0$, et prend des valeurs qui diffèrent seulement par le signe pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro entre lesquelles on n'a qu'une fois $\theta_1 = 0$. Donc

Le centre de gravité G oscille sur la verticale de sa position primitive [$x_1 = \alpha$, II], *en descendant d'abord de* $r_1(1 - \cos\theta_0)$, *puis remontant de la même quantité; et ces oscillations coïncident encore avec celles qui se font autour de l'axe du cylindre.*

4°. Pour un point M′ du rayon qui passe par le centre de gravité G, à la distance r' du point C, les deux dernières des équations (5) donnent

(10) $\quad x - \alpha = (r' - r_1)\sin\theta_1, \quad y - a = r'\cos\theta_1.$

En éliminant θ_1 entre ces équations, il vient

$$\left(\frac{x - \alpha}{r' - r_1}\right)^2 + \left(\frac{y - a}{r'}\right)^2 = 1,$$

qui représente une ellipse si $r' \gtrless \frac{r_1}{2}$, un cercle si $r' = \frac{r_1}{2}$; le centre est toujours le point (α, a) situé sur la verticale où se meut le centre de gravité G : si $r' > \frac{r_1}{2}$, le grand axe de l'ellipse est parallèle à Oy, et si $r' < \frac{r_1}{2}$, il est parallèle à Ox.

v désignant la vitesse absolue de M' à la fin du temps t, on déduit des équations (8) et (10)

$$v = \sqrt{2gr_1\left[r'^2 - r_1(2r' - r_1)\cos^2\theta_1\right] \cdot \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1}};$$

ainsi cette vitesse, nulle pour $\theta_1 = \pm\,\theta_0$, prend la même valeur pour deux valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro, et atteint son maxima $\pm\, 2(r' - r_1)\frac{\sqrt{gr_1}}{k}\cdot\sin\frac{\theta_0}{2}$ pour $\theta_1 = 0$. Donc

Le point M' *oscille sur un arc d'ellipse ou de cercle, formé de deux parties symétriques par rapport à la verticale du centre de gravité, et ces oscillations isochrones, de durée* T, *coïncident avec les autres.*

Il ne reste plus à chercher que la pression exercée par le cylindre sur le plan horizontal. Soient,

p cette pression à la fin du temps t,
P le poids du cylindre.

On a (I)

$$p = \frac{P}{mg}\cdot f,$$

et, en remplaçant f par sa valeur en fonction de θ_1 tirée des équations (2, 5, 7, 8),

$$p = Pk^2\left[\frac{1}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1} + \frac{2r_1^2\cos\theta_1.(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)}{(k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1)^2}\right].$$

On voit p augmenter de

$$P.\frac{k^2}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_0} \quad \text{à} \quad P.\left(1 + 4\frac{r_1^2}{k^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right),$$

tandis que θ_1 varie de $\pm\,\theta_0$ à zéro, et prend la même valeur pour deux valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro.

Notes.

I. On peut arriver aux équations (1) et (4), sans appliquer la force f au cercle, afin de le considérer ensuite comme libre. Les composantes des forces perdues sont seulement ainsi

$$-\mu\frac{d^2x}{dt^2},\quad -\mu\left(g+\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

pour l'élément (x, y) de masse μ : et on doit avoir

$$\Sigma.\mu\left[\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\left(g+\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y\right]=0,$$

δx, δy étant liées par la condition que le cercle touche toujours le plan horizontal. Or 1° pour un déplacement virtuel horizontal, $\delta x=$ const , $\delta y=0$, ce qui fournit l'équation (1); 2° pour un déplacement virtuel dans lequel le cercle tournerait de l'angle infiniment petit ω autour de son centre C,

$$\delta x=(a-y)\,\omega,\quad \delta y=(x-x')\,\omega,$$

ce qui fournit l'équation (4) en ayant égard à l'équation (1).

II. Si le plan est incliné au lieu d'être horizontal, en y posant le cylindre de manière que ses arêtes soient horizontales, ce qui a été dit dans l'article I subsiste, pourvu que l'on considère un cylindre formé de filets homogènes aussi bien dans la première partie du raisonnement que dans la seconde.

λ désignant l'angle d'inclinaison du plan, et l'axe des x étant une ligne de pente dirigée de haut en bas, on a, au lieu des équations (1), (2) et (3),

$$mg\sin\lambda-\Sigma.\mu\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

$$f-mg\cos\lambda-\Sigma.\mu\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

$$x'f-mg(x_1\cos\lambda+y_1\sin\lambda)+\Sigma.\mu\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0.$$

Le mouvement du centre de gravité parallèlement au plan est uniformément accéléré et déterminé par

$$x_1=\alpha+\frac{1}{2}gt^2\sin\lambda.$$

Les équations (6) et (8) sont remplacées par des équations qui diffèrent seulement de celles-là en ce que $g\cos\lambda$ s'y trouve au lieu de g; par conséquent, la partie de la discussion contenue dans l'article III (1°) sur le mouvement angulaire du cylindre autour de son axe subsiste, à cela près que la durée des oscillations est réduite à $T\sqrt{\cos\lambda}$.

x' est donnée par l'équation

$$x'=\alpha+\frac{1}{2}gt^2\sin\lambda-r_1\sin\theta_1,$$

ainsi cette abscisse du point C croîtra indéfiniment, et l'axe du cylindre n'oscille pas de la manière indiquée dans l'article III (2°). Cependant x' peut décroître au commencement, lorsque θ_1 passe de $-\theta_0$ à θ_0, car on a

$$\frac{dx'}{dt} = gt \sin \lambda - r_1 \cos \theta_1 \frac{d\theta_1}{dt},$$

et $r_1 \cos\theta_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt}$ (qui est positif avec $d\theta_1$) peut surpasser $gt \sin \lambda$; cela ne se présentera plus et x' sera constamment croissante, après que t aura atteint $\frac{2r_1}{k \sin \lambda} \cdot \sqrt{\frac{r_1 \cos \lambda}{g}} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2}$ qui est le maximum de $\frac{r_1 \cos \theta_1}{g \sin \lambda} \cdot \frac{d\theta_1}{dt}$. Quand x' décroît, le cylindre remonte le plan incliné.

L'équation (9) n'est pas modifiée, et, par conséquent, le centre de gravité G a, sur la droite mobile représentée par l'équation (11), le mouvement décrit dans l'article III (3°); la durée des oscillations est encore réduite à $T\sqrt{\cos \lambda}$.

Enfin, un point M' du rayon CG ne se meut plus sur une ellipse fixe (III, 4°), mais sur une ellipse qui glisse parallèlement à Ox dans le plan xOy, sans changer de forme ni de grandeur, et dont le centre suit le point d'intersection des droites représentées par les équations

$$x = \alpha + \frac{1}{2} gt^2 \sin \lambda, \quad y = a.$$