

**Théorème sur la somme de deux
carrés ; d'après Euler**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 46-47

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__46_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LA SOMME DE DEUX CARRÉS ;

D'APRÈS EULER.

THÉORÈME. $a^2 + b^2$ n'a aucun diviseur premier de la forme $4n - 1$, à moins que a et b aient un tel diviseur pour facteur commun.

Démonstration. a et b n'étant pas divisibles par $4n - 1$, il s'ensuit (Fermat) que $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ sera divisible par le nombre premier $4n - 1$; donc $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ ne sera pas divisible par ce nombre premier. Mais $a^2 + b^2$ est un facteur de $a^{4n-2} + b^{4n-2}$; donc, etc. (*Correspondance mathématique et physique*, t. I, p. 116. Lettre à Goldbach, de Berlin, 6 mars 1742).

Dans la même Lettre, on trouve cette simple démonstration du théorème de Fermat.

1. *Lemme.* p étant un nombre premier, on a

$$(1) \quad (a + b)^p - a^p - b^p = \dot{p}.$$

2. *Lemme.* Si

$$a^p - a = \dot{p},$$

on aura aussi

$$(a + 1)^p - (a + 1) = \dot{p}.$$

Démonstration. Dans la congruence (1), faisons

$$b = 1,$$

il vient

$$(a + 1)^p - a^p - 1 = \dot{p},$$

ou bien

$$(a + 1)^p - (a + 1) - (a^p - a) = \dot{p};$$

mais, par hypothèse,

$$a^p - a = \dot{p}.$$

Donc, etc.

3. THÉORÈME DE FERMAT. p étant un nombre premier, on a

$$a^p - a = \dot{p}.$$

Démonstration. On a

$$1^p - 1 = \dot{p};$$

donc, d'après le lemme 2,

$$2^p - 2 = \dot{p}, \quad 3^p - 3 = \dot{p}, \quad \text{etc.}$$
