Nouvelles annales de mathématiques

Dieu

Note sur les théorèmes qui servent de base à la rectification des courbes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 210-214

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__210_1>

NOTE SUR LES THÉORÈMES QUI SERVENT DE BASE A LA RECTIFICATION DES COURBES;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

Courbes planes.

On peut appliquer à une courbe plane quelconque la démonstration de ce théorème, qu'on ne donne ordinairement que pour un arc de cercle :

La limite du rapport d'un arc indéfiniment décroissant à sa corde est égale à l'unité.

En effet, soient

AB un arc de courbe dont l'extrémité A reste fixe et dont l'extrémité B varie sur cette courbe;

s, c et t les longueurs de cet arc, de sa corde et de la brisée ACB formée par les tangentes en A et B;

α le plus grand des deux angles adjacents au côté AB dans le triangle ACB qui renferme l'arc AB supposé assez petit.

On a évidemment

$$c = \text{AC}.\cos \text{A} + \text{BC}.\cos \text{B},$$

et, par conséquent,

$$c > t \cos \alpha.$$

Mais on peut admettre que $t > s$; ainsi l'inégalité qui précède donne, *à fortiori*,

$$c > s \cos \alpha, \tag{1}$$

d'où

$$\frac{s}{c} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Donc, comme $\frac{s}{c}$ ne peut tomber au-dessous de 1, et comme $\frac{1}{\cos \alpha}$ tend vers 1 (limite inférieure), lorsque α tend vers o, on a

$$\lim \frac{s}{c} = 1,$$

quand s tend vers zéro. C. Q. F. D.

On démontre de même que :

La limite du rapport de la différence entre un arc et sa corde au cube de l'arc est inférieure à la moitié du carré de la courbure.

Premièrement, on déduit *à fortiori* de l'inégalité (1) que

$$c > s\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

car $\cos \alpha > 1 - \frac{\alpha^2}{2}$; et, par conséquent, on a

$$\frac{s - c}{s^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^2. \tag{2}$$

D'autre part, les normales en A et B, à la courbe que l'on considère, se coupent en un point D de la circonférence circonscrite au triangle ACB, et en désignant par σ l'arc ACB de cette circonférence, dont le diamètre est CD, on a

$$\alpha < \frac{\sigma}{CD},$$

d'où

$$(3)\qquad \left(\frac{\alpha}{s}\right)^2 < \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 \cdot \frac{1}{\overline{\mathrm{CD}}^2}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les inégalités (2) et (3), il vient

$$\frac{s-c}{s^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 \frac{1}{\overline{\mathrm{CD}}^2}.$$

Or, $\frac{\sigma}{s} = \frac{\sigma}{c} : \frac{s}{c}$ tend vers l'unité, et CD tend vers le rayon de courbure R correspondant au point A, lorsque s tend vers zéro; donc on a

$$\lim \frac{s-c}{s^3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

C. Q. F. P., car la courbure en A est exprimée par $\frac{1}{\mathrm{R}}$.

D'après cela:

La différence entre un arc infiniment petit de courbe plane et sa corde est infiniment petite du troisième ordre au moins par rapport à l'arc.

Aux points d'inflexion où R est infini, $s - c$ est infiniment petite du cinquième ordre au moins, si l'on regarde $\frac{1}{\mathrm{R}}$ comme un infiniment petit du même ordre que s; et notre démonstration tombe en défaut lorsque $\mathrm{R} = 0$.

Courbes à double courbure.

Ce qui précède s'étend à des courbes à double courbure. En effet, soient

AB un arc de courbe quelconque;
s et c la longueur de cet arc et celle de sa corde;

AC la projection de AB sur un plan P qui passe par le point A, différant du plan normal en ce point et ne coupant pas la courbe entre A et B;

σ et γ les longueurs de AC et de sa corde;

AT et AS la tangente à AB en A, et la projection de cette tangente sur le plan P.

Supposons que le cylindre projetant se développe sur le plan TAS en même temps que AC se rectifie; et soient encore

AC′ la partie de AS sur laquelle s'étend AC;

AB′ ce que devient l'arc AB, et il faut admettre que la longueur de cet arc ne change pas dans le développement du cylindre;

c' la longueur de la corde de AB′;

enfin α et α' les angles BAC et B′AC′.

Les triangles rectangles ACB et AC′B′ donnent

$$\gamma = c.\cos\alpha, \quad \sigma = c'.\cos\alpha';$$

et, par conséquent, on a

$$\frac{s}{c} = \frac{s}{c'}\cdot\frac{\sigma}{\gamma}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}. \tag{1}$$

Or, lorsque s tend vers zéro, $\frac{s}{c'}$ et $\frac{\sigma}{\gamma}$ tendent vers l'unité (courbes planes), et $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$ tend aussi vers 1, car α et α' se rapprochent tous deux indéfiniment de l'angle TAS; donc on a

$$\lim\frac{s}{c} = 1,$$

comme pour une courbe plane.

Secondement, l'équation (1) donne

$$\frac{s - c}{s} = \frac{s\sigma.\cos\alpha - c'\gamma.\cos\alpha'}{s\sigma.\cos\alpha},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{s - c}{s} = \frac{s - c'}{s} + \frac{\sigma - \gamma\dfrac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}}{\sigma - \gamma}\cdot\frac{c'}{s}\cdot\frac{\sigma - \gamma}{\sigma};$$

et, en divisant par s^2, il vient

$$\frac{s - c}{s^3} = \frac{s - c'}{s^3} + \frac{\sigma - \gamma.\dfrac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}}{\sigma - \gamma}\cdot\frac{c'}{s}\cdot\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2\cdot\frac{\sigma - \gamma}{\sigma^3}.$$

s tendant vers zéro, $\frac{s - c'}{s^3}$ et $\frac{\sigma - \gamma}{\sigma^3}$ tendent vers de certaines limites qui sont finies en général et inférieures respectivement à $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R'^2}$ et $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\rho^2}$, si l'on représente par R' et ρ les rayons de courbure de la transformée plane et de la projection de la courbe que l'on considère (courbes planes); en même temps, $\frac{\sigma - \gamma\cdot\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}}{\sigma - \gamma}$, $\frac{c'}{s}$ et $\frac{\sigma}{s} = \frac{c'}{s}\cos\alpha'$ tendent vers l'unité; donc

$$\lim\frac{s - c}{s^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'^2} + \frac{1}{\rho^2}\right),$$

et, par conséquent :

La différence entre un arc infiniment petit de courbe quelconque et sa corde est infiniment petite du troisième ordre au moins, en général.
